TD 14 - Limites et continuité de fonctions

1BCPST 2 — Feuille d'exercice — Année 2023- 2024

Croissances comparées / Equivalents

Exercice 1 : *(1 minute ♡)* Calculer les limites suivantes et dire s'il s'agit ou pas de croissance comparées :

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{x}$ **2)** $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x - x$ **3)** $\lim\limits_{x\to-\infty} x^7e^{-3x^2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^7e^{-3x^2}$ **4)** $\lim\limits_{x\to-\infty} x^9\sqrt{e^x}$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)^2x^{-5}e^{\sqrt{x}}$ **6)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\ln x}{e^x}$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x\ln x}{e^x}$ **7)** $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)^3 - e^{x^2}$ **8)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\ln x)^2+x}{e^x - x}$

9) $\lim\limits_{x\to 0} x\ln\left(\dfrac{x}{1+x}\right)$ **10)** $\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$, limites quand x tend vers $\pm\infty$ et 0^+ et 0^-.

Exercice 2 : ★ Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 1^+}\ln x\ln(\ln x)$ **2)** $\lim\limits_{x\to 0} x\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor$ **3)** $\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)\ln\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)$ **4)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\dfrac{e^{\tan x}}{\cos x}$ **5)** $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\exp\left(\frac{1}{1-x}\right)}{\sqrt{x^2-1}}$

Exercice 3 : *(1 minute ♡)* Calculer des équivalents simples des fonctions suivantes :

1) $\dfrac{x^2+x+1}{x^3+2x+3}$ en 0 en -1 et en $+\infty$ **2)** $\dfrac{\ln x + x}{xe^x+x^2}$ en 0 et $+\infty$ **3)** $\sqrt{x}e^{x^2}+e^x-\sin x$ en $\pm\infty$ et 0.

4) $\dfrac{1}{x+1}+\sqrt{x}+1$ en -1 et en $+\infty$. **5)** $\dfrac{1}{1-x^2}$ en -1 et 1 **6)** x^2+2x+3 en -1 et en -2

7) $\arctan x$ en $\pm\infty$ **8)** $\dfrac{\ln(1+e^x)}{x+1}$ en 0 et $+\infty$ **9)** $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}$ en 0 et $+\infty$. **10)** $\dfrac{x^\pi+x^e}{\pi^x+e^x}$ en 0 et $+\infty$.

Continuité

Exercice 4 : ♡ - ★ Pour chacune des fonctions, dire si elle a une limite à gauche, à droite et enfin si ell est continue en a :

1) $x\mapsto\dfrac{x}{|x|}$ en $a=0$ **2)** $x\mapsto\lfloor x\rfloor$ en $a=2$. **3)** $x\mapsto x\left|1-\dfrac{1}{x}\right|$ en $a=0$ **4)** $x\mapsto\sqrt{x}\ln|x|$ en $a=0$

5) $x\mapsto|x|\ln|x|$ en $a=0$ **6)** $x\mapsto\dfrac{2x^2-5x+3}{x^2-1}$ en $a=1$ **7)** $x\mapsto x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en $a=0$.

Exercice 5 : *(en 1 minute ♡)* Donner les ensembles de continuité des fonctions suivantes :

1) $x\mapsto\dfrac{1}{\ln x}$ **2)** $x\mapsto\sin(1+e^x)$ **3)** $x\mapsto\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ **4)** $x\mapsto\dfrac{e^x+1}{x^2-3}$ **5)** $x\mapsto(x+1)^\pi$

6) $x\mapsto\ln|\cos(x)|$ **7)** $x\mapsto\lfloor\arctan x\rfloor$ **8)** $x\mapsto\lfloor\sqrt{x}\rfloor$ **9)** $x\mapsto\dfrac{x^5+2x^4+1}{x^2+4x-5}$

Exercice 6 : ★ - ★★ Donner les ensembles de continuité des fonctions suivantes :

1) $x\mapsto\sqrt{1-\sqrt{x}}$ **2)** $x\mapsto\sqrt{2x-x^2-2}$ **3)** $x\mapsto\ln\left(\dfrac{1-x^2}{x^2+4x-5}\right)$ **4)** $x\mapsto\sqrt{\ln x}$

5) $x\mapsto\ln(\arctan^2 x-3)$ **6)** $x\mapsto\ln\sqrt{1-e^x}$ **7)** $x\mapsto\sqrt{\tan x}+\ln(-\tan x)$ **8)** $x\mapsto(\sin x)^{\tan x}$

Exercice 7 : ★ Donner l'ensemble de continuité des fonctions suivantes (et justifier) :

1) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+1} & \text{si } x\geq -1\\ \ln(-1-x) & \text{sinon}\end{cases}$ **2)** $g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & \text{si } x>0\\ \sqrt{-x} & \text{sinon}\end{cases}$ **3)** $h(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x^2} & \text{si } x\in]-1,1[\\ \dfrac{1}{2} & \text{sinon}\end{cases}$

4) $f\circ g$ **5)** $g\circ f$ **6)** $g\circ h$ **7)** $h\circ f$

Exercice 8 : ★ Donner l'ensemble de définition et de continuité de ces fonctions et calculer leur prolongement par continuité : **1)** $x \mapsto x \ln x$ **2)** $x \mapsto x^{\ln x}$ **3)** $x \mapsto e^{-\frac{1}{|x|}}$ **4)** $x \mapsto \dfrac{\sqrt{|x-1|}}{x^2-1}$

Exercice 9 : *(★★ continuité et partie entière)*
1) Montrer que la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{\lfloor x \rfloor}{2}(2x - \lfloor x \rfloor - 1)$ est continue sur $\mathbb{R}$

2) Étudier la continuité de la fonction $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor - \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$.

Exercice 10 : ★ Montrer que tout fonction continue et périodique sur $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.

Exercice 11 : ★★ Soit $f \in C^0([0,1])$ telle que $f([0,1]) \subset [0,1]$, montrer que f admet un point fixe, c'est à dire qu'il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

Exercice 12 : ★ On dit que f est lipschitzienne sur I si et seulement si il existe $k > 0$ tel que :

$$\forall x, y \in I\ ,\ |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

Montrer que si f est lipschitzienne sur I alors f est continue sur I.

Exercice 13 : ★★ Trouver l'ensemble des fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ qui vérifient les égalités suivantes :
1) $\forall x, y \in \mathbb{R}\ ,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$ **2)** $\forall x, y \in \mathbb{R}\ ,\ f(x+y) = f(x)f(y)$
Indication : On pourra utiliser le résultat que tout nombre irrationnel est limite d'une suite de nombre rationnels.

Exercice 14 : ★ - ★★ On pose $f(x) = xe^x$
1) Donner l'ensemble de définition, de continuité et de dérivabilité de f et dresser son tableau de variation.
2) En déduire que f est bijective sur $I = [-1, +\infty[$ et calculer $f(I)$.
3) Quels sont les ensembles de départ et d'arrivée de f^{-1} ? Justifier que f^{-1} est continue.
Quel est le sens de variation de f^{-1} ?
4) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $u_n \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(u_n) = n$.
5) Quel est le sens de variation de la suite $(u_n)_n$? Admet-elle une limite quand $n \to +\infty$?
6) Montrer que $u_n \sim \ln n$. **7)** Calculer $f^{-1}(0)$ et trouver un équivalent simple en 0 de $f^{-1}(x)$.

Exercice 15 : ★★ On pose $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^k$.
1) Pour tout $n \geq 1$, montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ que l'on notera u_n.
2) En comparant $f_{n+1}(u_n)$ et $f_{n+1}(u_{n+1})$, montrer que la suite $(u_n)_n$ est monotone.
3) En déduire que la suite $(u_n)_n$ converge.

Exercice 16 : *(croissance et continuité ★★)* Soit f une fonction définie sur $[a,b]$, continue en a.
1) Montrer que si f et croissante sur $]a,b]$ alors f est croissante sur $[a,b]$.
2) Montrer que f est strictement croissante sur $]a,b]$ alors f est strictement croissante sur $[a,b]$.

Exercice 17 : ★★★ Etudier la continuité de la fonction $f : x \mapsto \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \dfrac{x^n}{n!}$.

Exercice 18 : *(★★★ Avec la définition de la continuité)* Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
On pose la fonction $\varphi : x \mapsto \begin{cases} \max\limits_{[0,x]} f \text{ si } x > 0 \\ \max\limits_{[x,0]} f \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$.
1) Justifier que φ est définie sur $\mathbb{R}$. **2)** Déterminer φ dans le cas où $f = \exp$ et $f = \sin$
3) Montrer que φ est continue.
4) Montrer qu'on peut avoir φ définie sur $\mathbb{R}$ et continue sans avoir f continue.