TD 14 - Limites et continuité de fonctions

1BCPST 2 — Feuille d'exercice — Année 2022- 2023

Croissances comparées / Equivalents

Exercice 1 : *(1 minute)* Calculer les limites suivantes et dire s'il s'agit ou pas de croissance comparées :

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{x}$ **2)** $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x - x$ **3)** $\lim\limits_{x\to-\infty} x^7 e^{-3x^2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^7 e^{-3x^2}$ **4)** $\lim\limits_{x\to-\infty} x^9\sqrt{e^x}$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x)^2 x^{-5} e^{\sqrt{x}}$ **6)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\ln x}{e^x}$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x\ln x}{e^x}$ **7)** $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x)^3 - e^{x^2}$ **8)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\ln x)^2 + x}{e^x - x}$

9) $\lim\limits_{x\to 0} x\ln\left(\dfrac{x}{1+x}\right)$ **10)** $\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$, limites quand x tend vers $\pm\infty$ et 0^+ et 0^-.

. . . .

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty$ sans croissances comparées.

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x - x = +\infty$ avec croissances comparées.

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^7 e^{-3x^2} = -\infty$ sans croissances comparées. et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^7 e^{-3x^2} = 0$ avec croissances comparées.

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^9\sqrt{e^x} = 0$ avec croissances comparées.

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x)^2 x^{-5} e^{\sqrt{x}} = +\infty$ avec croissances comparées.

6) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\ln x}{e^x} = 0$ avec croissances comparées. et $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x\ln x}{e^x} = 0$ avec croissances comparées.

7) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x)^3 - e^{x^2} = -\infty$ avec croissances comparées.

8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\ln x)^2 + x}{e^x - x} = +\infty$ sans croissances comparées.

9) $\lim\limits_{x\to 0} x\ln\left(\dfrac{x}{1+x}\right) = \lim\limits_{x\to 0} x\ln x - x\ln(1+x) = 0$ avec croissances comparées.

10) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = 0$ sans croissances comparées

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = 0$ avec croissances comparées et $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = -\infty$ sans croissances comparées

---

Exercice 2 : Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 1} \ln x \ln(\ln x)$ **2)** $\lim\limits_{x\to 0} x\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$ **3)** $\lim\limits_{x\to 1} (x-1)\ln\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)$ **4)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \dfrac{e^{\tan x}}{\cos x}$ **5)** $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\exp\left(\frac{1}{1-x}\right)}{\sqrt{x^2-1}}$

. . . .

1) On pose $y = \ln x$ et on trouve $\lim\limits_{x\to 1} \ln x \ln(\ln x) = \lim\limits_{y\to 0} y\ln y = \boxed{0}$ par croissances comparées

2) On a $\dfrac{1}{x} - 1 < \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor \leq \dfrac{1}{x} \iff 1 - x < x\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor \leq 1$ si $x \geq 0$ ou $1 \geq x\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor < 1 - x$ si x négatif. pour généraliser, on a donc pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $1 - |x| < x\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor < 1 + |x|$.

Par encadrement, on obtient : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} x\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor = 1}$.

3) $(x-1)\ln\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right) = \dfrac{x-1}{2}\ln(1-x) + \ln(1+x) = \dfrac{x-1}{2}\ln(1+x) - \dfrac{1-x}{2}\ln(1-x)$. Par croissances comparées, on a $(1-x)\ln(1-x) \underset{x\to 1^+}{\longrightarrow} 0$ et par ailleurs, on a aussi $\dfrac{x-1}{2}\ln(1+x) \underset{x\to 1^+}{\longrightarrow} 0$ donc en conclusion :

$$\boxed{\lim_{x\to 1}(x-1)\ln\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)=0}$$

4) $\dfrac{e^{\tan x}}{\cos x}=\dfrac{\sin x}{\cos x}e^{\tan x}\dfrac{1}{\sin x}=\dfrac{e^{\tan x}}{\tan x}\dfrac{1}{\sin x}$. On a $\dfrac{1}{\sin x}\underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\longrightarrow}1$ et $\tan x\underset{x\to\frac{\pi}{2}^+}{\longrightarrow}+\infty$, donc par composition et par croissances comparées, on a $\dfrac{e^{\tan x}}{\tan x}\underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\longrightarrow}+\infty$.

On en déduit $\boxed{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{e^{\tan x}}{\cos x}=+\infty}$

5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\exp\left(\frac{1}{1-x}\right)}{\sqrt{x^2-1}}$ On a $\dfrac{\exp\left(\frac{1}{1-x}\right)}{\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{\exp\left(\frac{1}{1-x}\right)}{\sqrt{x-1}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$.

Or, on a $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}\underset{x\to 1}{\longrightarrow}\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et comme $\dfrac{1}{x-1}\underset{x\to 1^+}{\longrightarrow}+\infty$,

on a par composition et par croissances comparées , $\dfrac{\exp\left(\frac{-1}{x-1}\right)}{\sqrt{x-1}}=\dfrac{1}{(x-1)^{\frac{1}{2}}}\exp\left(\dfrac{-1}{x-1}\right)\underset{x\to 1^+}{\longrightarrow}0$. Donc en conclusion $\boxed{\lim_{x\to 1^+}\dfrac{\exp\left(\frac{1}{1-x}\right)}{\sqrt{x^2-1}}=0}$

Exercice 3 : *(1 minute)* Calculer des équivalents simples des fonctions suivantes :

1) $\dfrac{x^2+x+1}{x^3+2x+3}$ en 0 en -1 et en $+\infty$ **2)** $\dfrac{\ln x+x}{xe^x+x^2}$ en 0 et $+\infty$ **3)** $\sqrt{|x|}e^{x^2}+e^x-\sin x$ en $\pm\infty$ et 0.
4) $\dfrac{1}{x+1}+\sqrt{x}+1$ en -1 et en $+\infty$. **5)** $\dfrac{1}{1-x^2}$ en -1 et 1 **6)** x^2+2x+3 en -1 et en -2
7) $\arctan x$ en $\pm\infty$ **8)** $\dfrac{\ln(1+e^x)}{x+1}$ en 0 et $+\infty$ **9)** $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}$ en 0 et $+\infty$. **10)** $\dfrac{x^\pi+x^e}{\pi^x+e^x}$ en 0 et $+\infty$.

. . . .

1) $\dfrac{x^2+x+1}{x^3+2x+3}\underset{x\to 0}{\sim}\dfrac{1}{3}$ $\qquad\dfrac{x^2+x+1}{x^3+2x+3}\underset{x\to -1}{\sim}\dfrac{1}{1+x}$ $\qquad\dfrac{x^2+x+1}{x^3+2x+3}\underset{x\to +\infty}{\sim}\dfrac{1}{x}$

2) $\dfrac{\ln x+x}{xe^x+x^2}\underset{x\to 0}{\sim}\dfrac{\ln x}{x}$ $\qquad\dfrac{\ln x+x}{xe^x+x^2}\underset{x\to +\infty}{\sim}e^{-x}$

3) $\sqrt{|x|}e^{x^2}+e^x-\sin x\underset{x\to -\infty}{\sim}\sqrt{-x}e^{x^2}$ $\qquad\sqrt{|x|}e^{x^2}+e^x-\sin x\underset{x\to +\infty}{\sim}\sqrt{x}e^{x^2}$ $\qquad\sqrt{|x|}e^{x^2}+e^x-\sin x\underset{x\to 0}{\sim}1$

4) $\dfrac{1}{x+1}+\sqrt{x+1}+1\underset{x\to +\infty}{\sim}\sqrt{x}$ $\qquad\dfrac{1}{x+1}+\sqrt{x+1}+1\underset{x\to -1}{\sim}\dfrac{1}{x+1}$.

5) $\dfrac{1}{1-x^2}\underset{x\to -1}{\sim}\dfrac{1}{2(x-1)}$ $\qquad\dfrac{1}{1-x^2}\underset{x\to -1}{\sim}\dfrac{1}{2(x+1)}$

6) $x^2+2x+3=(x+1)(x+2)\underset{x\to -1}{\sim}(x+1)$ $\qquad x^2+2x+3\underset{x\to -2}{\sim}-(x+2)$

7) $\arctan x\underset{x\to +\infty}{\sim}\dfrac{\pi}{2}$ $\qquad\arctan x\underset{x\to -\infty}{\sim}-\dfrac{\pi}{2}$ $\qquad$ **8)** $\dfrac{\ln(1+e^x)}{x+1}\underset{x\to 0}{\sim}\ln 2$ $\qquad\dfrac{\ln(1+e^x)}{x+1}\underset{x\to +\infty}{\sim}1$

9) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\underset{x\to 0}{\sim}\dfrac{1}{x^2}$ $\qquad\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\underset{x\to +\infty}{\sim}\dfrac{1}{x}$. $\qquad$ **10)** $\dfrac{x^\pi+x^e}{\pi^x+e^x}\underset{x\to 0}{\sim}\dfrac{x^e}{e^x}$ $\qquad\dfrac{x^\pi+x^e}{\pi^x+e^x}\underset{x\to +\infty}{\sim}\dfrac{x^\pi}{\pi^x}$

Continuité

Exercice 4 : Pour chacune des fonctions, dire si elle a une limite à gauche, à droite et enfin si elle est continue en a :

1) $x\mapsto\dfrac{x}{|x|}$ en $a=0$ **2)** $x\mapsto\lfloor x\rfloor$ en $a=2$. **3)** $x\mapsto x\left|1-\dfrac{1}{x}\right|$ en $a=0$ **4)** $x\mapsto\sqrt{x}\ln|x|$ en $a=0$
5) $x\mapsto|x|\ln|x|$ en $a=0$ **6)** $x\mapsto\dfrac{2x^2-5x+3}{x^2-1}$ en $a=1$ **7)** $x\mapsto x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en $a=0$.

....

1) $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x}{|x|}=-1$ $\qquad\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x}{|x|}=1$. Non continue en 0
2) $\lim\limits_{x\to2^-}\lfloor x\rfloor=1$ $\qquad\lim\limits_{x\to2^-}\lfloor x\rfloor=2$ Non continue en 2
3) $\lim\limits_{x\to0^-}x\left|1-\dfrac{1}{x}\right|=\lim\limits_{x\to0^-}x\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0^-}x-1=-1$
$\lim\limits_{x\to0^+}x\left|1-\dfrac{1}{x}\right|=\lim\limits_{x\to0^+}x\left(\dfrac{1}{x}-1\right)=\lim\limits_{x\to0^+}1-x=1$. Non continue en 0.
4) $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}\ln|x|=\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}\ln x=0$ par croissance comparée.
Pas de limité à gauche car pas définie à gauche. Continue en 0.
5) $\lim\limits_{x\to0^+}|x|\ln|x|=\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=0$ par croissances comparées. $\lim\limits_{x\to0^-}|x|\ln|x|=\lim\limits_{x\to0^+}(-x)\ln(-x)=0$ comme tout à l'heure. La fonction est prolongeable par continuité en 0
6) $\dfrac{2x^2-5x+3}{x^2-1}=\dfrac{2(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right)}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{2x-3}{x+1}\underset{x\to1}{\longrightarrow}\dfrac{-1}{2}$. La fonction est prolongeable par continuité en 1.
7) $|\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)|\le1\implies0\le|x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)|\le|x|$. Donc par encadrement, on a $|x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)|\underset{x\to0}{\longrightarrow}0$.
Donc $x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\underset{x\to0}{\longrightarrow}0$. La fonction est prolongeable par continuité en 0.

Exercice 5 : *(en 1 minute)* Donner les ensembles de continuité des fonctions suivantes :
1) $x\mapsto\dfrac{1}{\ln x}$ **2)** $x\mapsto\sin(1+e^x)$ **3)** $x\mapsto\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ **4)** $x\mapsto\dfrac{e^x+1}{x^2-3}$ **5)** $x\mapsto(x+1)^\pi$
6) $x\mapsto\ln|\cos(x)|$ **7)** $x\mapsto\lfloor\arctan x\rfloor$ **8)** $x\mapsto\lfloor\sqrt{x}\rfloor$ **9)** $x\mapsto\dfrac{x^5+2x^4+1}{x^2+4x-5}$

....

1) $]0,1[\cup]1,+\infty[$ **2)** $\mathbb{R}$ **3)** $\mathbb{R}^*$ **4)** $]-\infty,-\sqrt{3}[\cup]-\sqrt{3},\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3},+\infty[$
5) $]-1,+\infty[$ (prolongeable par continuité en -1) **6)** $\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$ **7)** $\mathbb{R}\backslash\left\{0,\dfrac{-\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right\}$
8) $\mathbb{R}_+\backslash\{n^2\mid n\in\mathbb{N}\}$ **9)** $\mathbb{R}\backslash\{1,-5\}$.

Exercice 6 : Donner les ensembles de continuité des fonctions suivantes :
1) $x\mapsto\sqrt{1-\sqrt{x}}$ **2)** $x\mapsto\sqrt{2x-x^2-2}$ **3)** $x\mapsto\ln\left(\dfrac{1-x^2}{x^2+4x-5}\right)$ **4)** $x\mapsto\sqrt{\ln x}$
5) $x\mapsto\ln(\tan^2x-3)$ **6)** $x\mapsto\ln\sqrt{1-e^x}$ **7)** $x\mapsto\sqrt{\tan x}+\ln(-\tan x)$ **8)** $x\mapsto(\sin x)^{\tan x}$

....

1) $\sqrt{.}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $x\mapsto\sqrt{1-\sqrt{x}}$ est continue sur $[0,1]$ à valeur dans $\mathbb{R}_+$. Donc par composition $x\mapsto\sqrt{1-\sqrt{x}}$ est définie sur $\boxed{[0,1]}$
2) On résout $2x-x^2-2\ge0$: On a $\Delta=4-8=-4$ donc ce n'est jamais positif.
$\boxed{f\text{ n'est donc définie et continue sur aucun ensemble.}}$
3) $x\mapsto\ln\left(\dfrac{1-x^2}{x^2+4x-5}\right)$. Déjà on a $x^2+4x-5=0\iff(x+5)(x-1)=0\iff x=-5$ ou $x=1$.
Supposons $x\in\mathbb{R}\backslash\{1,-5\}$. On a $\dfrac{1-x^2}{x^2+4x-5}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+5)}=\dfrac{x+1}{x+5}$ est positive si et seulement si $x\in]-\infty,-5[\cup]-1,+\infty[$.
On a donc : $x\mapsto\dfrac{1-x^2}{x^2+4x-5}$ continue sur $]-\infty,-5[\cup]-1,+\infty[$ à valeur dans $\mathbb{R}_+^*$ (prolongeable par continuité en 1).
et donc par composition, $x\mapsto\ln\left(\dfrac{1-x^2}{x^2+4x-5}\right)$ est continue sur $\boxed{]-\infty,-5[\cup]-1,+\infty[}$.
4) ln est continue sur $[1,+\infty($ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et $\sqrt{.}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$

donc $x \mapsto \sqrt{\ln x}$ est continue sur $\boxed{\mathbb{R}_+}$.

5) Supposons $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, alors $\tan^2 x - 3 > 0 \iff \tan x > \sqrt{3}$ ou $\tan x < -\sqrt{3} \iff x > \arctan\sqrt{3}$ ou $x < \arctan(-\sqrt{3}) \iff x \in \left]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[$.
Finalement, comme tan est π périodique, on en déduit que tan est continue sur I à valeur dans $\mathbb{R}_+^*$ avec
$\boxed{I = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, -\frac{\pi}{3}+k\pi\right[\cup \left]\frac{\pi}{3}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[}$
et par composition, $\boxed{x \mapsto \ln\big(\tan^2 x - 3\big) \text{ est continue sur } I}$

6) $1 - e^x \geq 0 \iff 1 \geq e^x \iff 0 \geq x$. Par ailleurs $\sqrt{1-e^x} = 0 \iff 1 - e^x = 0 \iff e^x = 1 \iff x = 0$
Donc $x \mapsto 1 - e^x$ est continue sur $\mathbb{R}_-^*$ à valeur dans $\mathbb{R}_+^*$. et $\sqrt{.}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeur dans $\mathbb{R}_+^*$. Enfin, ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$
Donc $\boxed{x \mapsto \ln\sqrt{1-e^x} \text{ est continue sur } \mathbb{R}_-^*}$

7) $\tan x \geq 0$ et $-\tan x > 0$ n'est jamais réalisé, donc $\boxed{\text{la fonction n'est continue ou définie sur aucun ensemble}}$

8) $(\sin x)^{\tan x} = \exp(\tan x \ln(\sin x))$ On veut donc $\sin x > 0$ c'est à dire $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [2k\pi, (2k+1)\pi]$ et $\tan x$ définie, c'est à dire, $x \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
On a donc : sin continue sur $I = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [2k\pi, (2k+1)\pi] \backslash \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right\}$, à valeur dans $\mathbb{R}_+^*$ et ln continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
Enfin, tan est continue sur I. Donc finalement par produit, puis composition par exp qui est continue sur $\mathbb{R}$, on obtient : $\boxed{x \mapsto (\sin x)^{\tan x} \text{ est continue sur } I = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right[\ \cup \ \left]\frac{\pi}{2} + 2k\pi, (2k+1)\pi\right]}$

Exercice 7 : Donner l'ensemble de continuité des fonctions suivantes (et justifier) :

1) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & \text{si } x \geq -1 \\ \ln(-1-x) & \text{sinon} \end{cases}$ **2)** $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ \sqrt{-x} & \text{sinon} \end{cases}$ **3)** $h(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2} & \text{si } x \in]-1,1[\\ \frac{1}{2} & \text{sinon} \end{cases}$

4) $f \circ g$ **5)** $g \circ f$ **6)** $g \circ h$ **7)** $h \circ f$

. . . .

1) f est continue sur $]-1, +\infty[$: en effet, $x \mapsto x+1$ est continue sur $]-1, +\infty[$ à valeur dans $\mathbb{R}_+$ et $\sqrt{.}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
Par ailleurs f est continue sur $]-\infty, -1[$: en effet, $x \mapsto -(x+1)$ est continue sur $]-\infty, -1[$ à valeur dans $\mathbb{R}_+^*$ et ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
Reste à vérifier la continuité en -1. On a $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \ln(-1-x) = -\infty$. Donc f n'est pas continue à gauche en -1 donc $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}\backslash\{-1\}}$.

2) g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ car $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Par ailleurs, g est continue sur $\mathbb{R}_-^*$ car $x \mapsto -x$ est continue sur $\mathbb{R}_-$ à valeur dans $\mathbb{R}_+$ et $\sqrt{.}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
g est donc continue sur $\mathbb{R}^*$. On vérifie la continuité en 0 : On a $\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} \sqrt{-x} = 0$ et $\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$. g n'est donc pas continue en 0. Finalement $\boxed{g \text{ est continue sur } \mathbb{R}^*}$

3) h est continue sur $]-1, 1[$ car $x \mapsto 1 + x^2$ est continue sur $]-1, 1[$ à valeur dans $\mathbb{R}_+^*$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
Par ailleurs, h est continue sur $]-\infty, -1[$ et sur $]1, +\infty[$ car $x \mapsto \frac{1}{2}$ est constante donc continue sur ces intervalles.

h est donc continue sur $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$. On vérifie la continuité en -1 : On a $\lim\limits_{x\to-1^-} h(x) = \lim\limits_{x\to-1^-} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to-1^+} h(x) = \lim\limits_{x\to-1^+} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2}$. h est donc continue en -1. De même, par parité elle est continue en 1.
Finalement $\boxed{h \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$

4) g est continue sur $\mathbb{R}^*$ à valeur dans $\mathbb{R}^+$ et f est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc $\boxed{f\circ g \text{ est continue sur } \mathbb{R}^*}$.
5) $f(x)=0 \iff \sqrt{x+1}=0$ ou $\ln(-1-x)=0 \iff x=-1$ ou $x=-2$.
f est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{-2,-1\}$ à valeur dans $\mathbb{R}^*$ et g est continue sur $\mathbb{R}^*$ donc $\boxed{g\circ f \text{ est continue sur } \mathbb{R}\backslash\{-2,-1\}}$.
6) h est continue sur $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}_+^*$ et g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $\boxed{g\circ h \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$.
7) f est continue sur $\mathbb{R}^*$ à valeur dans $\mathbb{R}$ et h est continue sur $\mathbb{R}$ donc $\boxed{h\circ f \text{ est continue sur } \mathbb{R}^*}$.

__**Exercice 8**__ **:** Donner l'ensemble de définition et de continuité de ces fonctions et calculer leur prolongement par continuité : **1)** $x\mapsto x\ln x$ **2)** $x\mapsto x^{\ln x}$ **3)** $x\mapsto e^{-\frac{1}{|x|}}$ **4)** $x\mapsto \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$

....

1) $f : x\mapsto x\ln x$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$ par produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$.
On a par ailleurs en 0 : $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x = 0$ par croissances comparées, on peut donc prolonger par continuité en 0 en posant $\boxed{f(0)=0 \text{ et } f \text{ continue sur } \mathbb{R}_+}$

2) $f(x) = x^{\ln x} = e^{-(\ln x)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. En effet, ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeur dans $\mathbb{R}$ et exp est continue sur $\mathbb{R}$.
Par ailleurs en 0, on a $\lim\limits_{x\to0^+} -(\ln x)^2 = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 0$. On peut donc prolonger par continuité en 0 en posant $\boxed{f(0)=0 \text{ et } f \text{ continue sur } \mathbb{R}_+}$

3) $f(x) = e^{-\frac{1}{|x|}}$. $x\mapsto|x|$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ à valeur dans $\mathbb{R}^*$ et $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$, donc f est continue sur $\mathbb{R}^*$. On remarque que f est paire.
Par ailleurs en 0, on a $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0$ et par parité on a aussi $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = 0$. On peut donc prolonger par continuité en 0 en posant $\boxed{f(0)=0 \text{ et } f \text{ continue sur } \mathbb{R}}$

4) $f(x)\dfrac{\sqrt{|x-1|}}{x^2-1}$ est définie et continue sur $]-1,1[$: en effet, $x\mapsto x^2-1$ est continue sur $]-1,1[$ à valeur dans $\mathbb{R}_+^*$ et $\sqrt{.}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeur dans $\mathbb{R}_+^*$, enfin $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
Par ailleurs, on a $f(x) = \dfrac{1-x}{\sqrt{(1-x)(1+x)}} = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} \underset{x\to1}{\longrightarrow} 0$. f est donc prolongeable par continuité en 1 en posant $\boxed{f(1)=0 \text{ et } f \text{ continue sur } \mathbb{R}\backslash\{-1\}}$

__**Exercice 9**__ **:** *(continuité et partie entière)*
1) Montrer que la fonction définie par $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\lfloor x\rfloor}{2}(2x-\lfloor x\rfloor-1)$ est continue sur $\mathbb{R}$

2) Étudier la continuité de la fonction $f : x\mapsto\lfloor x\rfloor+\sqrt{x-\lfloor x\rfloor}$.

....

1) Déjà, on sait que $\lfloor.\rfloor$ est définie sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$. Donc par produit, f est définie sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.
Soit $n\in\mathbb{Z}$, étudions la continuité de f en n :
<u>Limite à droite :</u> On a $\lim\limits_{x\to n^+}\lfloor x\rfloor = n$, donc $\lim\limits_{x\to n^+} f(x) = \dfrac{n}{2}(2n-n-1) = \dfrac{n(n-1)}{2}$.
<u>Limite à gauche :</u> On a $\lim\limits_{x\to n^-}\lfloor x\rfloor = n-1$, donc $\lim\limits_{x\to n^+} f(x) = \dfrac{n-1}{2}(2n-(n-1)-1) = \dfrac{(n-1)n}{2}$.

On trouve bien que f est continue en n. Cela est vrai pour tout $n \in \mathbb{Z}$, donc $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$

2) D'abord on remarque que $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ est définie sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ à valeur dans $\mathbb{R}_+$ (en effet on a $\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor x \rfloor \leq x$). $\sqrt{.}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que f est définie sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.
Si $n \in \mathbb{Z}$, étudions la continuité de f en n :
<u>Limite à droite :</u> On a $\lim\limits_{x\to n^+} \lfloor x \rfloor = n$, donc $\lim\limits_{x\to n^+} f(x) = n + \sqrt{n-n} = n$.
<u>Limite à gauche :</u> On a $\lim\limits_{x\to n^-} \lfloor x \rfloor = n-1$, donc $\lim\limits_{x\to n^+} f(x) = n - 1 + \sqrt{n-(n-1)} = n - 1 + \sqrt{1} = n$.
On trouve que f est continue en n. Cela est vrai pour tout $n \in \mathbb{Z}$, donc $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$

<u>Exercice 10</u> : Montrer que toute fonction continue et périodique sur $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.
....

On note T la période de f. Comme f est continue sur $[0,T]$, on a f qui est bornée et atteint ses bornes sur ce segment. On pose $\alpha = \min\limits_{[0,T]} f$ et $\beta = \max\limits_{[0,T]} f$. On a alors $\forall x \in \mathbb{R},\ , \alpha \leq f(x) \leq \beta$ car f est périodique. Donc f est majoré sur $\mathbb{R}$ par β et minorée par α.
On a donc $\boxed{\alpha = \min\limits_{\mathbb{R}} f \text{ et } \beta = \max\limits_{\mathbb{R}} f \text{ sont les bornes (atteintes) de } f \text{ sur } \mathbb{R}.}$.

<u>Exercice 11</u> : Soit $f \in C^0([0,1])$ telle que $f([0,1]) \subset [0,1]$, montrer que f admet un point fixe, c'est à dire qu'il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) = x_0$.
....

On pose $g(x) = f(x) - x$. On a alors $g(0) = f(0) - 0 = f(0) \geq 0$ et $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$ car $f(1) \in [0,1]$.
Par ailleurs, g est la somme de deux fonctions continues, elle est donc continue sur $[0,1]$.
On en déduit, par le théorème des valeurs intermédiaires : $\boxed{\text{il existe } x_0 \in [0,1] \mid g(x_0) = 0.}$
On a donc $g(x_0) = f(x_0) - x_0 = 0$ c'est à dire $\boxed{f(x_0) = x_0.}$

<u>Exercice 12</u> : On dit que f est lipschitzienne sur I si et seulement si il existe $k > 0$ tel que :
$$\forall x, y \in I\ ,\ |f(x) - f(y)| \leq k|x-y|$$
Montrer que si f est lipschitzienne sur I alors f est continue sur I.
....

Soit $a \in I$, montrons que f est continue en a. D'après la définition, cela revient à montrer que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.
Or on a $\forall x \in I\ ,\ 0 \leq |f(a) - f(x)| \leq k|a-x|$. Or, $|a-x| \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$.
Par encadrement on a donc $\lim\limits_{x\to a} |f(a) - f(x)| = 0$. Cela revient exactement à dire que $\boxed{\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)}$.

<u>Exercice 13</u> : Trouver l'ensemble des fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ qui vérifient les égalités suivantes :
1) $\forall x, y \in \mathbb{R}\ ,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$ **2)** $\forall x, y \in \mathbb{R}\ ,\ f(x+y) = f(x)f(y)$
Indication : On pourra utiliser le résultat que tout nombre irrationnel est limite d'une suite de nombre rationnels.
....

1) On a déjà $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$ donc $f(0) = 0$.
Par ailleurs, on pose $f(1) = a$. On va montrer pour tout nombre xß$n\mathbb{R}$, on a $f(x) = ax$.
Déjà, on remarque que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(nx) = nf(x)$. En effet, cela se montre par récurrence. Pour $n = 0$ on a $f(0 \cdot x) = f(0) = 0 = 0 \cdot f(x)$. Si c'est vrai au rang n, on a $f((n+1)x) = f(nx) + f(x) = nf(x) + f(x) = (n+1)f(x)$ par hypothèse de réccurence.
On a donc $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = nf(1) = na$. Par ailleurs si $k \in \mathbb{Z}$, alors on a $f(k) = ka$ si k est positif, d'après le raisonnement précédent et si < 0, alors $f(k-k) = f(k) + f(-k) = f(0) = 0$, donc $f(k) = -f(-k) = -(-ka) = ka$ car $-k \in \mathbb{N}$.
On a ensuite $f\left(\dfrac{n}{n}\right) = nf\left(\dfrac{1}{n}\right) = f(1) = a$ donc $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{a}{n}$.

Si on pose $r \in \mathbb{Q}$, on a $r = \dfrac{p}{q}$ et $f(r) = pf(\dfrac{1}{q}) = \dfrac{p}{q}a = ra$. La propriété est donc vraie pour tout nombre rationnel.
Enfin, si $x \in \mathbb{R}$, alors il existe $(r_n)_n \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ telle que $r_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$. On a donc $f(r_n) = r_n a \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} xa$ mais par continuité de f, on a aussi $f(r_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$. On a donc, par unicité de la limite : $f(x) = ax$.

Ceci est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc finalement on a $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ f(x) = ax \text{ avec } a \in \mathbb{R}}$

2) Exactement le même raisonnement mais cette fois on montre que $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ f(x) = a^x \text{ avec } a \in \mathbb{R}_+^* \text{ ou } f = 0}$

On a $a = f(1) \in \mathbb{R}_+^*$ car $f(1) = f\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\right) = f\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 \geq 0$.
et si $f(1) = a = 0$ alors $\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ f(x) = f(1 + (x-1)) = f(1)f(x-1) = 0$ donc $f = 0$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14 : On pose $f(x) = xe^x$
1) Donner l'ensemble de définition, de continuité et de dérivabilité de f et dresser son tableau de variation.
2) En déduire que f est bijective sur $I = [-1, +\infty[$ et calculer $f(I)$.
3) Quels sont les ensembles de départ et d'arrivée de f^{-1} ? Justifier que f^{-1} est continue.
Quel est le sens de variation de f^{-1} ?
4) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $u_n \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(u_n) = n$.
5) Quel est le sens de variation de la suite $(u_n)_n$? Admet-elle une limite quand $n \to +\infty$?
6) Montrer que $u_n \sim \ln n$. **7)** Calculer $f^{-1}(0)$ et trouver un équivalent simple en 0 de $f^{-1}(x)$.

. . . .

1) f est définie, continue et dérivable sur $\boxed{\mathbb{R}}$ comme produit de deux fonctions définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.

2) On a $f'(x) = (x+1)e^x$ donc $f'(x) \geq 0 \iff x + 1 \geq 0 \iff x \geq -1$.
f est donc strictement croissante sur $I = [-1, +\infty[$. $\boxed{f \text{ est donc bijective sur } I}$ à valeur dans $f(I)$. Par le théorème de la bijection continue, on a $f(I) = [f(-1), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[$ donc $\boxed{f(I) = \left[-e^{-1}, +\infty\right[}$.

3) On a $\boxed{f^{-1}\ \left[-e^{-1}, +\infty\right[\to [-1, +\infty[}$. Le théorème de la bijection continue dit que f^{-1} est continue sur $f(I)$ et a le même sens de variation que f donc $\boxed{f^{-1} \text{ est continue et strictement croissante sur } \left[-e^{-1}, +\infty\right[.}$

4) Comme on a $n \in \left[-e^{-1}, +\infty\right[$. On peut poser $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = f^{-1}(n)$.
On a alors $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ f(u_n) = f \circ f^{-1}(n) = \boxed{n}$.
Par ailleurs, comme on a $f(0) = 0$, on a $f^{-1}(0) = 0$, et comme f^{-1} est croissante,
on a $\forall n \in \mathbb{N},\ , n \geq 0 \implies f^{-1}(n) \geq f^{-1}(0) = 0 \implies u_n \geq 0$. Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_n \in \mathbb{R}_+}$.

5) $\boxed{u_n \text{ est strictement croissante}}$, en effet, f^{-1} est strictement croissante sur $\left[-e^{-1}, +\infty\right[$ et donc
$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ n+1 > n \implies f^{-1}(n+1) > f^{-1}(n) \implies u_{n+1} > u_n$
Par ailleurs, on a $f^{-1}(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ car elle est strictement croissante et non majorée. Donc $\boxed{u_n = f^{-1}(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}$.

6) On a montré que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Or $f(u_n) = u_n e^{u_n} = n$ donc $\ln u_n + u_n = \ln n$.
On en déduit $\dfrac{\ln u_n}{u_n} + 1 = \text{‘}\dfrac{\ln n}{u_n}$ et par croissances comparées $\dfrac{\ln u_n}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\dfrac{\ln n}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. On en déduit $\boxed{u_n \sim \ln n}$.
7) On a $f(0) = 0$ donc $f^{-1}(0) = 0$. On ne peut pas dire que $f^{-1}(x)$ est équivalent à 0, donc il faut utiliser $f \circ f^{-1}(x) = x \iff f^{-1}(x)e^{f^{-1}(x)} = x$. Or $e^{f^{-1}(x)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} e^0 = 1$ donc par produit $f^{-1}(x)e^{f^{-1}(x)} \underset{x\to 0}{\sim} f^{-1}(x)$
or $f^{-1}(x)e^{f^{-1}(x)} = x$, on en déduit :$f^{-1}(x)e^{f^{-1}(x)} \underset{x\to 0}{\sim} x$ finalement $\boxed{f^{-1}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x}$

Exercice 15 : On pose $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^k$.

1) Pour tout $n \geq 1$, montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$ que l'on notera u_n.
2) En comparant $f_{n+1}(u_n)$ et $f_{n+1}(u_{n+1})$, montrer que la suite $(u_n)_n$ est monotone.
3) En déduire que la suite $(u_n)_n$ converge.

....

1) On a f_n définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme somme de fonctions définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.

On a $f_n'(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 x^{k-1} > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. On a par ailleurs, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$, donc $f_n(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$. f_n est donc une bijection continue de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}_+$.

On peut donc poser $\boxed{u_n = f_n^{-1}(1)}$.

2) $f_{n+1}(x) = f_n(x) + (n+1)x^{n+1}$ donc $f_{n+1}(u_n) = f_n(u_n) + (n+1)(u_n)^{n+1}$,
donc $f_{n+1}(u_n) = 1 + (n+1)(u_n)^{n+1} \geq 1 = f_{n+1}(u_{n+1})$.
On en déduit $f_{n+1}(u_n) \geq f_{n+1}(u_{n+1})$ et donc par croissance de f_{n+1}, cela donne $u_n \geq u_{n+1}$.
Ceci est vrai pour tout $n \geq 1$, donc $\boxed{\text{la suite } (u_n)_n \text{ est décroissante.}}$

3) La suite $(u_n)_n$ est décroissante et minorée par 0, donc $\boxed{\text{elle converge vers une limite } \ell \in \mathbb{R}_+}$.

Exercice 16 : *(croissance et continuité)* Soit f une fonction définie sur $[a, b]$, continue en a.
1) Montrer que si f et croissante sur $]a, b]$ alors f est croissante sur $[a, b]$.
2) Montrer que f est strictement croissante sur $]a, b]$ alors f est strictement croissante sur $[a, b]$.

....

Soit f une fonction définie sur $[a, b]$, continue en a.
1) On a déjà $\forall x, y \in]a, b], x > y \implies f(x) \geq f(y)$. On veut montrer : $\forall x, y \in [a, b], x > y \implies f(x) \geq f(y)$.
Il reste donc à montrer que pour $x = a$, $\forall y \in]a, b], y > a \implies f(y) \geq f(a)$.
Soit $y \in]a, b]$, $\underline{\text{on veut montrer } f(y) \geq f(a)}$. Or f étant continue, on a $f\left(a + \dfrac{1}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(a)$.
Comme $\dfrac{1}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, on a pour n suffisamment grand (disons pour $n \geq N$) $0 < \dfrac{1}{n} < y - a$
c'est à dire $a < a + \dfrac{1}{n} < y$. On pose $y_n = a + \dfrac{1}{n}$. On a donc $y_n \in]a, b]$ et $y > y_n > a$, donc $f(y) \geq f(y_n)$ pour tout $n \geq N$.
Par passage à la limite quand $n \to +\infty$, on obtient donc $\boxed{f(y) \geq f(a)}$. D'où le résultat.
2) On a déjà $\forall x, y \in]a, b], x > y \implies f(x) > f(y)$. On veut montrer : $\forall x, y \in [a, b], x > y \implies f(x) > f(y)$.
Il reste donc à montrer que pour $x = a$, $\forall y \in]a, b], y > a \implies f(y) > f(a)$.

Soit $y \in]a, b]$, $\underline{\text{on veut montrer } f(y) > f(a)}$ f étant croissante, le raisonnement précédent nous donne $f(y) \geq f(a)$, ce qui est insuffisant car nous voulons une inégalité stricte.

$\underline{\text{Supposons par l'absurde que } f(y) = f(a)}$. Si on prend $y_1 = \dfrac{y + a}{2}$, on a alors $y_1 \in]a, y[\subset]a, b]$.
Donc $f(y) > f(y_1)$ car f est strictement croissante sur $]a, b]$. Mais d'après le raisonnement de la question précédente, comme f est croissante, on a $y_1 > a \implies f(y_1) \geq f(a) = f(y)$. Donc $f(y_1) \geq f(y)$. C'est contradictoire avec $f(y) > f(y_1)$
Il est donc impossible d'avoir $f(y) = f(a)$. La seule option est donc $\boxed{f(y) > f(a)}$.

Exercice 17 : *(Avec la définition de la continuité)* Etudier la continuité de la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}$.

....

Déjà montrons que f est bien définie.

La suite $\left(\dfrac{x^n}{n!}\right)_n$ est une suite qui converge vers 0 par croissance comparée (exponentielle < factorielle) donc elle est bornée. On peut donc définir sa borne supérieure.

Etudions la suite de terme $u_n = \dfrac{x^n}{n!}$ pour trouver son maximum.
On a $u_n \geq 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{x}{n+1} \geq 1 \iff x \geq n+1 \iff x-1 \geq n \iff \lfloor x \rfloor - 1 \geq n$.
On a donc $u_{n+1} \geq u_n$ si et seulement si $n \in [\![0, \lfloor x \rfloor - 1]\!]$. Autrement dit, $u_{\lfloor x \rfloor} \geq u_{\lfloor x \rfloor -1} \geq \ldots \geq u_1 \geq u_0$.
Mais après $u_{\lfloor x \rfloor}$, la suite devient décroissante, donc $u_{\lfloor x \rfloor}$ est le terme maximal de la suite,
Autrement dit on a $u_{\lfloor x \rfloor} = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \dfrac{x^n}{n!} = \dfrac{x^{\lfloor x \rfloor}}{\lfloor x \rfloor !}$. On a donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ f(x) = \dfrac{x^{\lfloor x \rfloor}}{\lfloor x \rfloor !}}$.

Donc, si $k \in \mathbb{Z}$, on a $\forall x \in]k, k+1[,\ f(x) = \dfrac{x^k}{k!}$ est continue (c'est une fonction polynômiale).
Donc f est continue sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$. Etudions la continuité en $k \in \mathbb{Z}$:

<u>Limite à gauche :</u> $\forall x \in]k-1, k[$, on a $f(x) = \dfrac{x^{k-1}}{(k-1)!}$ donc $\lim\limits_{x \to k^-} f(x) = \dfrac{k^{k-1}}{(k-1)!}$
<u>Limite à droite :</u> $\forall x \in]k, k+1[$, on a $f(x) = \dfrac{x^k}{(k)!}$ donc $\lim\limits_{x \to k^+} f(x) = \dfrac{k^k}{(k)!} = \dfrac{k \cdot k^{k-1}}{k \cdot (k-1)!} = \dfrac{k^{k-1}}{(k-1)!}$
Comme la limite est la même, on en déduit que f est continue en $k \in \mathbb{Z}$. Ceci étant vrai pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on trouve que $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$

<u>Exercice 18</u> : *(Avec la définition de la continuité)* Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
On pose la fonction $\varphi : x \mapsto \begin{cases} \max\limits_{[0,x]} f \text{ si } x > 0 \\ \max\limits_{[x,0]} f \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$.
1) Justifier que φ est définie sur $\mathbb{R}$. **2)** Déterminer φ dans le cas où $f = \exp$ et $f = \sin$
3) Montrer que φ est continue.
4) Montrer qu'on peut avoir φ définie sur $\mathbb{R}$ et continue sans avoir f continue.
. . . .

1) Si $x \geq 0$, comme f est continue sur $[0, x]$, elle admet bien un maximum sur $[0, x]$ donc $\varphi(x)$ est bien défini. Pareil si $x \leq 0$. Ainsi φ est définie sur $\mathbb{R}$

2) Si $f = \exp$ alors $\boxed{\varphi(x) = \begin{cases} e^x \text{ si } x > 0 \\ 1 \text{ si } x \leq 0 \end{cases}}$. Si $f = \sin$ alors $\boxed{\varphi(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \cup \left[\dfrac{-3\pi}{2}, -\pi\right] \\ 1 & \text{si } x \geq \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & \text{si } x \in [-\pi, 0] \\ -1 & \text{si } x \leq \dfrac{-3\pi}{2} \end{cases}}$

3) Soit $\varepsilon > 0$ alors comme f est continue, $\exists \delta > 0 \mid \forall x, y \in \mathbb{R}\ ,\ |x-y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|x - y| \leq \delta$. On montre que $|\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon$ à l'aide d'une disjonction de cas.

<u>1er cas : si $x, y \in \mathbb{R}_+$</u>. On a $\varphi(x) = \max\limits_{[0,x]} f$ et $\varphi(y) = \max\limits_{[0,y]} f$. Supposons $y > x$ le raisonnement serait identique pour $x > y$) Ainsi, $[0, x] \subset [0, y]$ et $\varphi(x) \leq \varphi(y)$.
On a $\exists x_0 \in [0, x] \mid f(x_0) = \max\limits_{[0,x]} f = \varphi(x)$ et $\exists y_0 \in [0, y] \mid f(y_0) = \max\limits_{[0,y]} f = \varphi(y)$.
On a $\varphi(x) \leq \varphi(u) \implies f(x_0) \leq f(y_0) \quad (*)$ - <u>Si $y_0 \in [0, x]$:</u> alors $f(y_0) \leq \max\limits_{[0,x]} f = f(x_0)$ et donc d'après $(*)$, on a $f(y_0) = f(x_0) \implies \varphi(x) = \varphi(y)$ ainsi $|\varphi(x) - \varphi(y)| = 0 < \varepsilon$. C'est vérifié ! - <u>Si $y_0 \in]x, y]$:</u> on a alors $y_0 \leq y \implies y_0 - x \leq y - x \implies |y_0 - x| \leq |y - x| \leq \delta \implies |f(y_0) - f(x)| < \varepsilon \implies \overline{f(y_0) - f(x)} < \varepsilon$ car $f(y_0) \geq f(x)$

Ainsi $|\varphi(y) - \varphi(x)| = |f(y_0) - f(x_0)| = f(y_0) - f(x_0) = f(y_0) - f(x) + f(x) - f(x_0) \leq f(y_0) - f(x) \leq \quad$ car

$f(x) - f(x_0) \leq 0$
Conclusion on a bien dans ce cas $|\varphi(y) - \varphi(x)| < \varepsilon$.

2eme cas : si $x, y \in \mathbb{R}_-$: C'est exactement pareil que le précédent donc je ne le fais pas.

3eme cas : si $x \in \mathbb{R}_-$ et $y \in \mathbb{R}_+$: Alors $\exists x_0 \in [x, 0] \mid f(x_0) = \max\limits_{[x,0]} f = \varphi(x)$
et $\exists y_0 \in [0, y] \mid f(y_0) = \max\limits_{[0,y]} f = \varphi(y)$.

On a donc $|y_0 - x_0| = y_0 - x_0 \leq y - x \leq \delta$ car $y_0 \leq y$ et $x_0 \geq x$ ainsi $|f(y_0) - f(x_0)| < \varepsilon \implies |\varphi(y) - \varphi(x)| < \varepsilon$

4eme cas : si $x \in \mathbb{R}_+$ et $y \in \mathbb{R}_-$: C'est exactement pareil que le précédent donc je ne le fais pas.
Dans tous les cas on a montré que $|\varphi(y) - \varphi(x)| < \varepsilon$ donc $\boxed{\varphi \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$
4) Si $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \neq 1 \\ 0 \text{ si } x = 1 \end{cases}$.
Alors on peut vérifier facilement que le maximum de f sur les segments de types $[0, x]$ et $[x, 0]$ sera toujours $f(0) = 1$ Donc on aura $\boxed{\varphi(x) = 1}$ sur $\mathbb{R}$. qui est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ alors que f n'est pas continue en 1.