

TD 17 - Dérivation

1BCPST 2

Feuille d'exercice

Année 2022- 2023

Dérivabilité en un point

Exercice 1 : (En 1 minute) Calculer les limites suivantes

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x}$ 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x+1} - 1}{x}$ 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$ 4) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x + 1}{x - \pi}$ 5) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{4x - \pi}$
 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{\ln(1+x)}$ 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$ 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x}$ 9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{1 - \cos x}$ 10) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x^2}$.
 11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x)}{\arctan(5x)}$ 12) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arctan(x^2 - 1)}{\arctan(x - 1)}$

- Réponses : 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x} = \boxed{0}$ 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x+1} - e}{x} = \boxed{e}$ 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \boxed{1}$ 4) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x + 1}{x - \pi} = \boxed{0}$
 5) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{4x - \pi} = \boxed{\frac{1}{2}}$ 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{\ln(1+x)} = \boxed{1}$ 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \boxed{2}$ 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x} = \boxed{0}$
 9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{1 - \cos x} = \boxed{1}$ 10) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x^2} = \boxed{-\infty}$ 11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x)}{\arctan(5x)} = \boxed{\frac{1}{5}}$
 12) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arctan(x^2 - 1)}{\arctan(x - 1)} = \boxed{2}$

Exercice 2 : (En 1 minute) Donner des équivalents simples des termes suivants :

- 1) $\frac{\sin x}{x^2 + x}$ en 0 2) $\frac{\arctan x}{\sin^2 x}$ en 0 3) $\frac{\ln(e^x + 1)}{(x + \sqrt{x})^2}$ en $+\infty$ et en $-\infty$ 4) $\frac{\ln(x)}{1+x}$ en 1
 5) $\arctan x + x^2$ en 0. 6) $e^x - 1 + \sqrt{x}$ en 0. 7) $x \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + 1$ en $+\infty$.

- Réponses : 1) $\frac{\sin x}{x^2 + x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \boxed{\frac{1}{x}}$ 2) $\frac{\arctan x}{\sin^2 x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \boxed{\frac{1}{x}}$
 3) $\frac{\ln(e^x + 1)}{(x + \sqrt{x})^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \boxed{\frac{1}{x}}$ et $\frac{\ln(e^x + 1)}{(x + \sqrt{x})^2} \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} \boxed{\frac{e^x}{x^2}}$ 4) $\frac{\ln(x)}{1+x} \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \boxed{\frac{x-1}{2}}$
 5) $\arctan x + x^2 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \boxed{x}$. 6) $e^x - 1 + \sqrt{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \boxed{\sqrt{x}}$ 7) $x \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \boxed{2}$.

Exercice 3 : Dire si les fonctions suivantes sont dérivables (à gauche, à droite) au point 0 :

- 1) $f(x) = \lfloor x \rfloor$ 2) $f(x) = x \lfloor x \rfloor$ 3) $f(x) = x|x|$ 4) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ si $x \neq 0$ avec $f(0) = 0$
 5) $f(x) = \frac{x}{|x| + 1}$ 6) $f(x) = 2^{x^2} + 1$. 7) $f(x) = \sqrt{x^2 - x^3}$

Réponses : 1) $f(x) = \lfloor x \rfloor$. On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{0 - 0}{x} = 0$ donc $\boxed{f \text{ est dérivable à droite en 0 de dérivée } 0}$.

On a $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1 - 0}{x} = -\infty$ Donc $\boxed{f \text{ n'est pas dérivable à droite en 0}}$.

2) $f(x) = x \lfloor x \rfloor$. On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \lfloor x \rfloor = 0$. Donc $\boxed{f \text{ est dérivable à droite de dérivée } 0}$.

De même $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \lfloor x \rfloor = -1$. Donc $\boxed{f \text{ est dérivable à gauche en 0 de dérivée } -1}$.

Par ailleurs f n'est pas dérivable en 0.

3) $f(x) = x|x|$. On a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$. Donc $\boxed{f \text{ est dérivable en 0 et } f'(0) = 0}$.

4) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$. On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$. Donc $\boxed{f \text{ n'est pas dérivable à droite}}$.

De même $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} = 0$ par croissances comparées. Donc f est dérivable à gauche en 0 de dérivée 0.
Par ailleurs f n'est pas dérivable en 0.

5) $f(x) = \frac{x}{|x| + 1}$. On a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x| + 1} = 1$. Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$.

6) $f(x) = 2^{x^2} + 1$. On a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{x^2} - 1}{x} = \exp x^2 \ln 2x = +\infty$.

Donc f n'est dérivable en 0, ni à gauche, ni à droite.

7) $f(x) = \sqrt{x^2 - x^3}$. On a $\frac{f(x) - f(0)}{x} = \sqrt{\frac{x^2 - x^3}{x^2}} = \sqrt{1 - x} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \frac{|x|}{x}$.

Donc f est dérivable à gauche en 0 de dérivée -1 et à droite de dérivée 1 .

Par contre f n'est pas dérivable en 0.

Exercice 4 : $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } |x| > 1 \\ ax^3 + bx + c & \text{si } x \in [-1, 1] \end{cases}$ Trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$, afin que f soit dérivable sur $\mathbb{R}$.

Réponses : Pour être dérivable, il faut déjà que f soit continue donc $f(1) = a + b + c = 1$ et $f(-1) = -a - b + c = -1$. Par ailleurs, il faut qu'elle soit dérivable en 1 et -1 .

On veut donc $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x - 1} = +\infty$ et Pareil en -1

Autrement dit, on veut avoir $3a + b = -1$ et $3a + b = -1$. Cela donne le système suivant :

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ -a - b + c = -1 \\ 3a + b = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} a + b + c = 1 \\ 2c = 0 \\ 3a + b = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 0 \\ a + b = 1 \\ 3a + b = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 0 \\ a + b = 1 \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} c = 0 \\ b = \frac{3}{2} \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Finalement $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } |x| > 1 \\ \frac{3x - x^3}{2} & \text{si } x \in [-1, 1] \end{cases}$

Dérivabilité sur un ensemble

Exercice 5 : Donner les ensembles de continuité et de dérivabilité des fonctions suivantes :

1) $f(x) = |e^x - 1|$ 2) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 4}$ 3) $f(x) = \frac{1}{x + |x|}$ 4) $f(x) = \ln(1 + |x + 1|)$.

5) $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ 6) $f(x) = x^{\sin(x)}$ 7) $f(x) = |1 + \sin(x)|$. 8) $f(x) = (\arctan(x))^{\frac{-1}{4}}$.

Réponses : 1) $x \mapsto e^x - 1$ est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ à valeur dans $\mathbb{R}^*$.

$|\cdot|$ est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ donc par composition f est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

2) $x \mapsto x^2 - 5x + 4$ est continue sur $]-\infty, 1] \cup [4, +\infty[$ à valeur dans $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $]-\infty, 1[\cup]4, +\infty[$ à valeur dans $\mathbb{R}_+^*$. $\sqrt{\cdot}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc par composition :

f est continue sur $]-\infty, 1] \cup [4, +\infty[$ et dérivable sur $]-\infty, 1[\cup]4, +\infty[$.

3) $x \mapsto x + |x|$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ à valeur dans $\mathbb{R}^*$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ donc f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

4) $x \mapsto 1 + |x + 1|$ est continue sur $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}_+^*$ et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ à valeur dans $\mathbb{R}_+^*$. Par ailleurs $\ln$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc

f est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

5) $x \mapsto 1 - x$ est continue sur $[-1, 1[$ à valeur dans $\mathbb{R}^*$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ donc :
 $x \mapsto \frac{1+x}{1-x}$ est continue sur $[-1, 1[$ à valeur dans $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $] - 1, 1[$ à valeur dans $\mathbb{R}_+^*$. Par ailleurs $\sqrt{\cdot}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc f est continue sur $[-1, 1[$ et dérivable sur $] - 1, 1[$.

6) $f(x) = x^{\sin(x)} = \exp(\sin(x) \ln x)$. $\sin$ et $\ln$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeur dans $\mathbb{R}$ et $\exp$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. On en déduit f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Remarque : on peut prolonger f par continuité en 0 car $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} e^0 = 1$ par croissances comparées.

7) On a $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(x) \geq -1 \implies \sin(x) + 1 \geq 0 \implies f(x) = \sin(x) + 1$ Donc f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions continues et dérivables.

8) $\arctan$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeur dans $\mathbb{R}_+^*$ et $x \mapsto x^{-\frac{1}{4}}$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 6 : Donner les ensembles de continuité et de dérivabilité des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x > 0 \\ x & \text{sinon} \end{cases}$ 2) $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2} & \text{si } |x| < 1 \\ \frac{-x}{2} & \text{sinon} \end{cases}$ 3) $h(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x < 0 \\ x\sqrt{x} & \text{sinon} \end{cases}$
 4) f^{-1} 5) h^{-1} 6) $f \circ g$ 7) $g \circ f$ 8) $h^{-1} \circ g$ 9) $g \circ h^{-1}$.

Réponses : 1) $\exp$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $x \mapsto x$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_-$ donc f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Par ailleurs en 0, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$. Donc f n'est pas continue, ni dérivable en 0. En conclusion f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

2) $x \mapsto 1 + x^2$ est continue et dérivable sur $] - 1, 1[$ à valeur dans $\mathbb{R}^*$ donc $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est continue et dérivable sur $] - 1, 1[$. Par ailleurs, $x \mapsto \frac{-x}{2}$ est continue et dérivable sur $] - \infty, -1] \cup [1, +\infty[$.
 Donc g est continue et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

En -1 : on a $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = \frac{1}{2} = \lim_{x \rightarrow -1^-} g(x)$ donc g est continue. Par ailleurs, $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{g(x) - g(-1)}{x + 1} = -\frac{1}{2}$ et la dérivée de $\frac{1}{1+x^2}$ étant $\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$, on a $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{g(x) - g(-1)}{x + 1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \neq -\frac{1}{2}$. Donc g n'est pas dérivable en -1 .

En 1 : on a $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \frac{-1}{2} \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \frac{1}{2}$ donc g est discontinue.

Finalement : g est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

3) $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto x\sqrt{x}$ donc continues et dérivables sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$ respectivement. Donc h est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Par ailleurs, on a $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = 0$ et pour la dérivée on a aussi $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{h(x) - h(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{h(x) - h(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$ donc h est dérivable en 0. h est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

4) f est strictement croissante donc f est bien bijective. On a $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_- \cup [1, +\infty[$ donc f^{-1} est définie et continue sur $\mathbb{R}_- \cup [1, +\infty[$ d'après le théorème de la bijection monotone et f^{-1} est dérivable en tous les points $f(x)$ tels que $f'(x) \neq 0$. Comme la dérivée de f ne s'annule pas, on a donc : f^{-1} est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_- \cup [1, +\infty[$.

5) h est strictement croissante et donc bijective. D'après le théorème de la bijection continue, on a h^{-1} continue sur $h(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et dérivable en tout point $h(x)$ tel que $h'(x) \neq 0$. On a $h'(x) = 0 \iff x = 0$ donc h^{-1} continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

6) g est continue sur $\mathbb{R} \setminus 0, 1$ et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus -1, 0, 1$ à valeur dans $\mathbb{R}^*$. Par ailleurs, f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ donc : $f \circ g$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$

7) $f(x) = -1 \iff x = -1$ et $f(x) = 1 \iff x = 0$.
 f est continue et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$ à valeur dans $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ et g est continue et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
 Donc $g \circ f$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$

8) g est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ à valeur dans $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus -1, 0, 1$ à valeur dans $\mathbb{R}^*$. Par ailleurs, h^{-1} est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ donc : $h^{-1} \circ g$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$

9) $h^{-1}(x) = -1 \iff h(-1) = x \iff x = (-1)^3 = -1$ et $h^{-1}(x) = 1 \iff x = h(x) \iff x = 1$.
 Donc h^{-1} est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ à valeur dans $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ à valeur dans $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
 Par ailleurs et g est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
 Donc $g \circ h^{-1}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$

Exercice 7 : Soit I un intervalle tel que $\forall x \in I, -x \in I$. et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction paire ou impaire dérivable sur I . Donner la parité de f' en fonction de celle de f .

.....

Réponse : Si f est paire alors $\forall x \in I, f(-x) = f(x)$. On a par ailleurs, $x \rightarrow -x$ est dérivable sur I à valeur dans I (par hypothèse sur I) et f est dérivable sur I , donc $x \rightarrow f(-x)$ est dérivable sur I et en dérivant de part et d'autre on trouve :

$\forall x \in I, -f'(-x) = f'(x)$. La fonction f' est donc impaire sur I .

De même, si f est impaire, alors $\forall x \in I, f(-x) = -f(x)$ donne que $-f'(-x) = -f'(x) \iff f'(-x) = f'(x)$ donc f' est paire sur I .

Dans tous les cas f' est de parité opposée par rapport à f .

Exercice 8 : Montrer que $f(x) = \frac{\lfloor x \rfloor}{2}(2x - \lfloor x \rfloor - 1)$ est dérivable à gauche et à droite en tout point de $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

.....

Réponses : Déjà, les fonctions $\lfloor \cdot \rfloor$ et $x \mapsto x$ étant dérivables sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on a f dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. D'ailleurs, $\forall x \in]n, n+1[$, on a $f(x) = \frac{n}{2}(2x - n - 1)$ donc $f'(x) = \frac{n}{2} \cdot 2 = n = \lfloor x \rfloor$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on a $f'(x) = \lfloor x \rfloor$.

Etudions la dérivabilité de f en $n \in \mathbb{Z}$. On regarde la limite à gauche et à droite de f en n

Limite à droite $x > n$: Pour $x \in]n, n+1[$, on a $\lfloor x \rfloor = n$. Donc :

$$\frac{f(x) - f(n)}{x - n} = \frac{1}{x - n} \left(\frac{n}{2}(2x - n - 1) - \frac{n(n-1)}{2} \right) = \frac{n}{2(x-n)}(2x - n - 1 - n + 1) = \frac{n(x-n)}{x-n} = n \xrightarrow{x \rightarrow n^+} n.$$

Donc $\lim_{x \rightarrow n^+} \frac{f(x) - f(n)}{x - n} = n = \lfloor x \rfloor$. et f est dérivable à droite en n .

Limite à gauche $x < n$: Pour $x \in]n-1, n[$, on a $\lfloor x \rfloor = n-1$. Donc :

$$\frac{f(x) - f(n)}{x - n} = \frac{1}{x - n} \left(\frac{n-1}{2}(2x - (n-1) - 1) - \frac{n(n-1)}{2} \right) = \frac{n-1}{2(x-n)}(2x - n + 1 - 1 - n) = \frac{(n-1)(x-n)}{x-n} =$$

$n-1 \xrightarrow{x \rightarrow n^-} n-1$. Donc $\lim_{x \rightarrow n^-} \frac{f(x) - f(n)}{x - n} = n-1 = \lfloor x \rfloor - 1$. et f est dérivable à gauche en n .

Théorèmes de Rolle et Accroissements finis

Exercice 9 : Montrer que la dérivée de tout polynôme scindé à racines simples est aussi un polynôme scindé à racines simples.

Réponses : Soit P un polynôme de degré n scindé à racines simples. Alors il admet $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$ qui sont n racines distinctes (on les range dans l'ordre).

Pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on a donc $P_n(\lambda_k) = P_n(\lambda_{k+1}) = 0$. D'après le théorème de Rolle, comme P_n est continue sur $[\lambda_k, \lambda_{k+1}]$ est dérivable sur $] \lambda_k, \lambda_{k+1} [$, il existe $\alpha_k \in] \lambda_k, \lambda_{k+1} [$ tel que $P'_n(\alpha_k) = 0$.

On a donc trouvé $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ qui sont $n-1$ racines de P'_{n-1} . Elles sont bien deux à deux distinctes car $\alpha_1 < \lambda_2 < \alpha_2 < \dots < \lambda_{n-1} < \alpha_{n-1}$. Comme le degré de P'_n est $n-1$, et qu'il admet $n-1$ racines distinctes, alors P'_n est scindé à racines simples.

Exercice 10 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et périodique. Montrer que f' s'annule.

Réponse : Si T est la période de f , alors on a $f(0) = f(T)$ par définition de la périodicité. Donc comme f est continue sur $[0, T]$ et dérivable sur $]0, T[$ alors en appliquant le théorème de Rolle, il existe $c \in]0, T[$ | $f'(c) = 0$. Donc f' s'annule sur $]0, T[$.

Exercice 11 : Utiliser le théorème des accroissements finis pour démontrer les inégalités suivantes :

1) $\forall x \in \mathbb{R}, |\arctan x| \leq |x|$. 2) $\forall x \in \mathbb{R}, |\cos x - 1| \leq |x|$. 3) $\forall x > 0, \frac{1}{x+1} < \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) < \frac{1}{x}$

4) $\forall x > 0, \arctan(x) > \frac{x}{1+x^2}$.

Réponses : 1) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, on sait que $\arctan$ est continue sur $[0, x]$ et dérivable sur $]0, x[$ donc il existe $c \in]0, x[$ tel que $\arctan(x) - \arctan(0) = \arctan'(c)(x-0) \iff \arctan(x) = \frac{x}{1+c^2}$

De même si $x \in \mathbb{R}_-^*$, on a $\arctan$ est continue sur $[x, 0]$ et dérivable sur $]x, 0[$ donc il existe $c \in]x, 0[$ tel que $\arctan(x) - \arctan(0) = \arctan'(c)(x-0) \iff \arctan(x) = \frac{x}{1+c^2}$

On a donc $\forall x \in \mathbb{R}^*, |\arctan(x)| = \frac{|x|}{1+c^2} < |x|$ car $1+c^2 > 1$.

On a égalité quand $x = 0$, donc finalement $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, |\arctan x| \leq |x|}$

2) Rédigeons peu plus vite que la question précédente : Si $x \in \mathbb{R}^*$ alors on pose $x_0 = \min(0, x)$ et $x_1 = \max(0, x)$. On a $\cos$ continue sur $[x_0, x_1]$ et dérivable sur $]x_0, x_1[$. Il existe donc $c \in]x_0, x_1[$ tel que $\cos(x) - \cos(0) = \cos'(c)(x-0)$ c'est à dire $\cos x - 1 = -\sin(c)x$.

On a donc $\forall x \in \mathbb{R}^*, |\cos x - 1| = |\sin(c)||x| \leq |x|$. C'est vrai aussi quand $x = 0$ donc finalement $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, |\cos x - 1| \leq |x|}$.

3) Soit $x > 0$, comme $[x, x+1] \subset \mathbb{R}_+^*$, on a $\ln$ continue sur $[x, x+1]$ et dérivable sur $]x, x+1[$ donc par le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]x, x+1[$ tel que $\ln(x+1) - \ln(x) = \ln'(c)(x+1-x) = \frac{1}{c}$

On a donc $\forall x > 0, \ln(x+1) - \ln(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \frac{1}{c}$. Or $0 < x < c < x+1$ donne, par décroissance de la

fonction inverse, $\frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$. D'où le résultat : $\boxed{\forall x > 0, \frac{1}{x+1} < \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) < \frac{1}{x}}$

4) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, on sait que $\arctan$ est continue sur $[0, x]$ et dérivable sur $]0, x[$ donc il existe $c \in]0, x[$ tel que $\arctan(x) - \arctan(0) = \arctan'(c)(x-0) \iff \arctan(x) = \frac{x}{1+c^2}$

Par ailleurs $0 < c < x \implies c^2 < x^2 \implies 0 < 1+c^2 < 1+x^2 \implies \frac{1}{1+c^2} > \frac{1}{1+x^2}$.

On en déduit : $\boxed{\forall x > 0, \arctan(x) > \frac{x}{1+x^2}}$

Exercice 12 : Si $a > 0$, encadrer puis trouver un équivalent de la suite $u_n = \sqrt{n+a} - \sqrt{n}$.

De même trouver un équivalent de $v_n = \arctan(n+1) - \arctan(n)$ et $w_n = (n+2)^\pi - n^\pi$

Réponse : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, On a $\sqrt{\cdot}$ continue sur $[n, n+a]$ et dérivable sur $]n, n+a[$. Donc d'après le théorème des accroissements finis, $\exists c_n \in]n, n+a[\mid \sqrt{n+a} - \sqrt{n} = \frac{n+a-n}{2\sqrt{c_n}} = \frac{a}{2\sqrt{c_n}}$. Or $n < c_n < n+a \implies$

$$\frac{1}{\sqrt{n+a}} < \frac{1}{\sqrt{c_n}} < \frac{1}{\sqrt{n}}. \text{ Donc } \forall n \in \mathbb{N}, \text{ on a } \boxed{\frac{a}{2\sqrt{n+a}} < u_n < \frac{a}{2\sqrt{n}}}.$$

On a donc $\sqrt{\frac{n}{n+a}} < \frac{2\sqrt{n} \cdot u_n}{a} < 1$ et par encadrement on a $\frac{2\sqrt{n} \cdot u_n}{a} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$. On en déduit $\boxed{u_n \sim \frac{a}{2\sqrt{n}}}$.

Avec le même mode de raisonnement, on a $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{1+(n+1)^2} \leq v_n \leq \frac{1}{1+n^2}}$ qui donne $\boxed{v_n \sim \frac{1}{n^2}}$

et $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, 2n^{\pi-1} \leq w_n \leq 2(n+2)^{\pi-1}}$ qui donne $\boxed{w_n \sim 2n^{\pi-1}}$

Exercice 13 : Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left((x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}} \right)$.

Réponse : On pose $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a $\forall x > 0, f'(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}} = \frac{x-1}{x}e^{\frac{1}{x}}$

Si $x > 0$, on a f continue sur $[x, x+1]$, dérivable sur $]x, x+1[$, donc d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c_x \in]x, x+1[\mid f(x+1) - f(x) = f'(c_x)$.

Par encadrement, comme $x < c_x < x+1$, on a $c_x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$. Par ailleurs, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}} = 1$ (pas de forme indéterminée)

Par composition, on a donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(c_x) = 1$. On en déduit $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left((x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}} \right) = 1}$.

Exercice 14 : Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$\frac{f(a)}{f(b)} = \exp\left(\frac{f'(c)}{f(c)}(b-a)\right)$$

(On pourra utiliser la fonction $g = \ln f$)

Réponse : f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ à valeur dans $\mathbb{R}_+^*$. Par ailleurs, $\ln$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc $g = \ln f$ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a, b[\mid g(b) - g(a) = g'(c)(b-a)$.

Cela se réécrit : $g(b) - g(a) = g'(c)(b-a) \iff \ln f(b) - \ln f(a) = \frac{f'(c)}{f(c)}(b-a) \iff \ln \frac{f(b)}{f(a)} = \frac{f'(c)}{f(c)}(b-a)$

$\iff \boxed{\frac{f(b)}{f(a)} = \exp\left(\frac{f'(c)}{f(c)}(b-a)\right)}$ D'où le résultat.

Exercice 15 : On pose $f(x) = \arctan(x) - x$ et $v(x) = x^2$.

1) Montrer qu'il existe un nombre $c \in]0, x[$ tel que $\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u'(c)}{v'(c)}$. 2) En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x) - x}{x^2}$.

Réponse : f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ à valeur dans $\mathbb{R}_+^*$. Par ailleurs, $\ln$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc $g = \ln f$ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a, b[\mid g(b) - g(a) = g'(c)(b-a)$.

Cela se réécrit : $g(b) - g(a) = g'(c)(b-a) \iff \ln f(b) - \ln f(a) = \frac{f'(c)}{f(c)}(b-a) \iff \ln \frac{f(b)}{f(a)} = \frac{f'(c)}{f(c)}(b-a)$

$\iff \boxed{\frac{f(b)}{f(a)} = \exp\left(\frac{f'(c)}{f(c)}(b-a)\right)}$ D'où le résultat.

Dérivées d'ordre n

Exercice 16 : Montrer que ces fonctions sont de classe C^∞ sur leur ensemble de définition et calculer leur dérivée n^{ieme} où $n \in \mathbb{N}$.

- 1) $f(x) = e^{2x}$ 2) $f(x) = x^5$ 3) $f(x) = xe^x$. 4) $f(x) = (x^2 + 1)e^{2x}$

Réponses : 1) $x \mapsto 2x$ et $\exp$ sont toutes les deux de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, donc f l'est aussi par composée de fonctions C^∞ . On a $f^{(n)}(x) = 2^n e^{2x}$

- 2) f est de classe C^∞ car c'est un polynôme. On a $f^{(n)}(x) = \begin{cases} \frac{5!}{(5-n)!} x^{5-n} & \text{si } n \in \llbracket 0, 5 \rrbracket \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

- 3) On pose $g(x) = x$ et $h(x) = e^x$. par produit de h et g qui sont C^∞ , on a aussi $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ et d'après la formule de Leibniz : $f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} g^{(k)}(x) h^{(n-k)}(x) = g^{(0)}(x) h^{(n)}(x) + n g^{(1)}(x) h^{(n-1)}(x) = x e^x + n e^x = (x+n)e^x$.

Finalement $f^{(n)}(x) = (x+n)e^x$.

- 4) $f(x) = (x^2 + 1)e^{2x} = g(x)h(x)$ On le résout comme la question précédente, on a d'après la formule de Leibniz : $f^{(n)}(x) = g^{(0)}(x)h^{(n)}(x) + n g^{(1)}(x)h^{(n-1)}(x) + \frac{n(n-1)}{2} g^{(2)}(x)h^{(n-2)}(x)$ Cela donne

$$f^{(n)}(x) = (x^2 + 2nx + n^2 - n + 1)e^{2x}.$$

Exercice 17 : On pose $f(x) = \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right)$.

- 1) Quel est le domaine de continuité de f ? Montrer que f est prolongeable par continuité.
 2) Montrer que la fonction ainsi prolongée est dérivable sur $\mathbb{R}$.
 3) Montrer que $f \in C^1(\mathbb{R})$.
 4) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f \in C^n(\mathbb{R})$ et $\exists P_n \in \mathbb{R}[X] \mid \forall x \in \mathbb{R}^*, f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right)$ et $f^{(n)}(0) = 0$.
 5) En déduire que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Réponses : 1) $x \mapsto \frac{-1}{x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ à valeur dans $\mathbb{R}$ et $\exp$ est continue sur $\mathbb{R}$. Donc f est continue sur $\mathbb{R}^*$.

On a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{x^2} = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ et f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

- 2) $x \mapsto \frac{-1}{x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ à valeur dans $\mathbb{R}$ et $\exp$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

On a par ailleurs, $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{x} \exp\left(-\left(\frac{1}{x}\right)^2\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ par croissances comparées. On en déduit que f est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$. f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

- 3) On a $\forall x \neq 0, f'(x) = \frac{2}{x^3} \exp\left(-\left(\frac{1}{x}\right)^2\right)$. f' est donc continue sur $\mathbb{R}^*$ comme produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$. Par ailleurs, par croissances comparées on a $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 = f'(0)$. Donc f' est bien continue sur $\mathbb{R}$.

- 4) On fait une récurrence. Initialisation : pour $n = 0$, on a $f^{(0)}(x) = f(x) = \exp\left(-\left(\frac{1}{x}\right)^2\right)$ donc on peut poser $P_0 = 1$ et obtenir le résultat.

Hérédité : Si c'est vrai au rang n alors au rang $n+1$:

On a $x \mapsto \frac{1}{x}$ dérivable sur $\mathbb{R}^*$ à valeur dans $\mathbb{R}$ et P_n qui est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc par produit de fonctions

dérivables sur $\mathbb{R}^*$, on a $f^{(n)}$ dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

Par ailleurs en 0 : $\frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x - 0} = \frac{f^{(n)}(x)}{x} = \frac{1}{x} P_n\left(\frac{1}{x}\right) \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} c(P_n) \frac{1}{x^{n+1}} \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right) \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} 0$
par croissances comparées. Donc $f^{(n)}$ est dérivable en 0 de dérivée égale à 0. $f^{(n)}$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
Montrons que sa dérivée est continue.

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = \frac{-1}{x^2} P'_n\left(\frac{1}{x}\right) \exp\left(-\left(\frac{1}{x}\right)^2\right) + \frac{2}{x^3} P_n\left(\frac{1}{x}\right) \exp\left(-\left(\frac{1}{x}\right)^2\right) = \boxed{P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right) \exp\left(-\left(\frac{1}{x}\right)^2\right)}$$

Avec $\boxed{P_{n+1} = -X^2 P'_n + 2X^3 P_n}$. On a $x \mapsto \frac{1}{x}$ continue sur $\mathbb{R}^*$ à valeur dans $\mathbb{R}$ et P_{n+1} qui est continue sur $\mathbb{R}$ donc par produit de fonctions continue sur $\mathbb{R}^*$, on a $f^{(n+1)}$ continue sur $\mathbb{R}^*$. Finalement, on a $f^{(n+1)}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} c(P_{n+1}) \frac{1}{x^{n+1}} \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right) \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} \boxed{0 = f^{(n+1)}(0)}$ par croissances comparées, donc $f^{(n+1)}$ est continue sur $\mathbb{R}$. On a donc bien $\boxed{f \in C^{n+1}(\mathbb{R})}$ l'hypothèse est vraie au rang $n + 1$.

5) La conclusion de la récurrence est que $\forall n \in \mathbb{N}, f \in C^n(\mathbb{R})$. Cela est la définition de $\boxed{f \in C^\infty(\mathbb{R})}$.

Exercice 18 : Montrer que si $f \in C^n(I)$ s'annule en $n + 1$ points distincts de I , alors $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois.

.....
Réponse : On montre par récurrence pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$: " $f^{(k)}$ s'annule en $n - k + 1$ points distincts"
Si on démontre que cela est vrai pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, alors on aura démontré le résultat voulu, parce que pour $k = n$, on aura $\boxed{f^{(n)} \text{ s'annule en 1 point}}$.

Initialisation : Par hypothèse c'est vrai au rang $k = 0$ car $f^{(0)} = f$ s'annule en $n + 1$ points distincts.

Hérédité : Si c'est vrai au rang k , alors on a $f^{(k)}$ qui s'annule en $n - k + 1$ points distincts : $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{n-k+1} \in I$.

On se ramène alors au même raisonnement que l'exercice 9 : Pour tout $k \in \llbracket 1, n - k \rrbracket$, on a donc $f^{(k)}(\lambda_i) = f^{(k)}(\lambda_{i+1}) = 0$ D'après le théorème de Rolle, comme $f^{(k)}$ est continue sur $[\lambda_i, \lambda_{i+1}]$ est dérivable sur $] \lambda_i, \lambda_{i+1} [$, il existe $\alpha_i \in] \lambda_i, \lambda_{i+1} [$ tel que $(f^{(k)})'(\alpha_i) = 0$.

On a donc $f^{(k+1)}(\alpha_i) = 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, n - k \rrbracket$. Avec les α_i deux à deux distinct car $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \dots < \alpha_{n-k} < \alpha_{n-k+1}$.

Donc au rang $(k + 1)$, $\boxed{f^{(k+1)} \text{ s'annule en } n - k \text{ points distincts}}$.

Conclusion : L'hypothèse est donc validée pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. En particulier, pour $k = n$, on trouve le résultat voulu comme précisé plus haut.

Exercice 19 : (*Convexité*) Soit f une fonction deux fois dérivable sur I . On dit que f est convexe si et seulement si :

$$\forall x, y \in I, \forall t \in [0, 1], f(tx + (1 - t)y) \geq tf(x) + (1 - t)f(y)$$

Montrer que f'' est positive sur I si et seulement si f est convexe sur I .

Indication : Pour le sens indirect on étudiera les variations de la fonction : $g : x \mapsto \frac{f(a) - f(x)}{a - x}$ pour ensuite prouver que f' est croissante (faire des dessins peut aider).

.....
Réponse : Sens direct Si $x < y \in I$, on pose pour $t \in (0, 1]$, $g(t) = f(tx + (1 - t)y) - tf(x) - (1 - t)f(y)$.
On a $t \rightarrow tx + (1 - t)y = y + t(x - y)$ est une fonction décroissante, continue et dérivable sur $[0, 1]$ à valeur dans $[x, y]$. Par ailleurs, f est dérivable sur $[x, y]$. Donc g est dérivable sur $[0, 1]$.
On a $g'(t) = (x - y)f'(tx + (1 - t)y) - f(x) + f(y)$. Comme $f'' \geq 0$, on sait que f' est croissante. et comme $t \mapsto tx + (1 - t)y$ est décroissante et $x - y < 0$, on en déduit que g' est croissante sur $[0, 1]$.
Or comme f est continue sur $[x, y]$ et dérivable sur $]x, y[$, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]x, y[$ | $f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$.
On a donc $g'(t) = (x - y)(f'(tx + (1 - t)y) - f'(c))$. On a donc $g'(t) > 0 \iff f'(tx + (1 - t)y) < f'(c) \iff tx + (1 - t)y < c \iff t > \frac{c - y}{x - y}$ On note $t_0 = \frac{c - y}{x - y}$. Et comme on a $g(0) = g(1) = 0$, on en déduit le

tableau de variation de g :

x	0	t_0	1
$g'(t)$	+	0	-
$g(t)$	0	$g(t_0)$	0

On a donc d'après le tableau, $g(t) \leq 0$ sur $[0, 1]$, donc $\forall t \in [0, 1], f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y)$

Sens indirect

On montre que $g : x \mapsto \frac{f(a) - f(x)}{a - x}$ est croissante sur I .

On pose $x < y$ et on va montrer que $g(x) < g(y)$.

Premier cas : $x < y < a$ alors $y = tx + (1-t)a$ avec $t = \frac{y-x}{a-y} \in [0, 1]$. On a donc $g(y) = \frac{f(a) - f(tx + (1-t)a)}{a - tx - (1-t)a} = \frac{f(a) - f(tx + (1-t)a)}{t(a-x)} \geq \frac{f(a) - tf(x) - (1-t)f(a)}{t(a-x)} = \frac{t(f(a) - f(x))}{t(a-x)} = g(x)$.

On en déduit $g(y) > g(x)$

Deuxième cas : $x < a < y$ On écrit alors $a = tx + (1-t)y$ avec $t = \frac{a-y}{x-y} \in [0, 1]$. On a alors $g(y) = \frac{f(tx + (1-t)y) - f(y)}{tx + (1-t)y - y} = \frac{f(tx + (1-t)y) - f(y)}{t(x-y)} \geq \frac{tf(x) + (1-t)f(y) + f(y)}{t(x-y)} = \frac{f(x) - f(y)}{x-y}$

et de même $g(x) = \frac{f(tx + (1-t)y) - f(x)}{tx + (1-t)y - x} \leq \frac{f(x) - f(y)}{x-y} \leq g(y)$ (on passe les calculs). On trouve bien $g(x) \leq g(y)$.

Troisième cas : $a < x < y$ Se traite comme le premier.

Dès lors, on peut montrer que f' est croissante. En effet, si on prend, a et $b \in I$. On pose $g_a(x) = \frac{f(a) - f(x)}{a - x}$

et $g_b(x) = \frac{f(b) - f(x)}{b - x}$ alors g_a et g_b sont croissantes.

Si $a < x < y < b$ on a $g_a(x) \geq g_b(y)$, en effet, on a $g_a(x) \geq g_a(y) = g_y(a) \geq g_y(b) = g_b(y)$

Donc $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} g_a(x) \geq \lim_{y \rightarrow b^-} g_b(y) = f'(b)$. D'où le résultat : f' est croissante ! Cela donne directement

que $f'' \geq 0$.

Exercice 20 : Soit f une fonction deux fois dérivable en $a \in \mathbb{R}$.

1) Si $f''(a) \neq 0$, Montrer que $f(x) - f(a) - (x-a)f'(a) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \frac{(x-a)^2}{2} f''(a)$.

2) En déduire un équivalent de $\cos(x) - 1$ quand $x \rightarrow 0$ 3) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2}$.

Réponses : 1) L'idée est de d'utiliser le taux d'accroissement de f' et de voir son implication sur f en intégrant f' .

On a $\frac{f'(x) - f'(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a} f''(a)$ donc si on pose $g(x) = \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a} - f''(a)$ alors $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$.

On a par ailleurs, $f'(x) = (x-a)(g(x) + f''(a)) + f'(a) = f'(a) + (x-a)f''(a) + (x-a)g(x)$ Donc en intégrant, on trouve :

$$\begin{aligned}
\int_a^x f'(t) \, dt &= \int_a^x f'(a) + (t-a)f''(a) + (t-a)g(t) \, dt \\
&= \int_a^x f'(a) \, dt + \int_a^x (t-a)f''(a) \, dt + \int_a^x (t-a)g(t) \, dt \\
&= f'(a) \int_a^x 1 \, dt + f''(a) \int_a^x (t-a) \, dt + \int_a^x (t-a)g(t) \, dt \\
&= f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2} + \int_a^x (t-a)g(t) \, dt
\end{aligned}$$

ainsi $f(x) - f(a) - (x-a)f'(a) = \frac{(x-a)^2}{2}f''(a) + \int_a^x (t-a)g(t) \, dt$

Pour démontrer l'équivalence, il faut donc démontrer que $\int_a^x (t-a)g(t) \, dt = o_{x \rightarrow a}\left(\frac{(x-a)^2}{2}f''(a)\right)$ Cela revient à démontrer que $\int_a^x (t-a)g(t) \, dt = o_{x \rightarrow a}((x-a)^2)$

On remarque que f' est continue sur $\mathbb{R}$, donc g est continue sur $\mathbb{R}$ (en prolongeant par continuité $g''(a) = 0$)

On va encadrer $h(x) = \frac{1}{(x-a)^2} \int_a^x (t-a)g(t) \, dt$.

Soit $\varepsilon > 0$, on veut montrer $\exists \delta > 0 \mid |x-a| < \delta \implies |h(x)| < \varepsilon$

On a $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$ donc $\exists \delta > 0 \mid |x-a| < \delta \implies |g(x)| < \varepsilon$

Par inégalité triangulaire sur les intégrales, on a pour $x \in]a, a + \delta[$:

$$|h(x)| \leq \frac{1}{(x-a)^2} \int_a^x |t-a||g(t)| \, dt < \frac{1}{(x-a)^2} \int_a^x (x-a)\varepsilon \, dt = \frac{1}{(x-a)} \int_a^x \varepsilon \, dt = \varepsilon$$

et pour $x \in]a - \delta, a[$:

$$|h(x)| \leq \frac{1}{(x-a)^2} \int_x^a |t-a||g(t)| \, dt < \frac{1}{(x-a)^2} \int_x^a (a-x)\varepsilon \, dt = \frac{1}{a-x} \int_x^a \varepsilon \, dt = \varepsilon$$

Dans tous les cas on trouve $|x-a| < \delta \implies |h(x)| < \varepsilon$. Donc $h(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$

On a donc $\int_a^x (t-a)g(t) \, dt = o_{x \rightarrow a}((x-a)^2)$ et $\boxed{f(x) - f(a) - (x-a)f'(a) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \frac{(x-a)^2}{2}f''(a)}$

2) On a $\cos(0) = 1$ et $\cos'(0) = -\sin(0) = 0$ et $\cos''(0) = -\cos(0) = -1$

Ainsi la formule appliquée à $f = \cos$ et $a = 0$ donne $\boxed{\cos(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{-x^2}{2}}$

3) $\frac{\cos(x) - 1}{x^2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{-1}{2}$ donc $\boxed{\frac{\cos(x) - 1}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{-1}{2}}$
