

TD 17 - Probabilités

1BCPST 2

Feuille d'exercice

Année 2022- 2023

Les questions nécessitant la calculatrice sont estampillées (**Calculatrice**)

Probabilités

Exercice 1 : (*En 1 minute* ♡) On fait trois lancers d'une pièce équilibrée. Calculer les probabilités des événements suivants :
1) Obtenir trois fois Pile 2) Obtenir Face sur le premier et le deuxième lancers
3) Obtenir Face sur le premier ou le deuxième lancers 4) Obtenir Pile au premier et au troisième lancers
5) Obtenir au moins une fois Face 6) Obtenir plus de Face que de Pile
7) Ne pas obtenir trois fois le même résultat. 8) Ne pas obtenir le même résultat deux fois d'affilé.

Exercice 2 : ★ On tire 4 cartes dans un paquet 52 de cartes. Calculer la probabilité d'obtenir 4 cartes de la même couleur et celle d'avoir des couleurs toutes différentes si :
1) On tire les 4 cartes simultanément
2) On tire les 4 cartes successivement dans un tirage sans remise.
3) On tire les 4 cartes successivement dans un tirage avec remise.

Exercice 3 : ★★ $n \in \mathbb{N}$. On lance une pièce n fois :
1) Calculer la probabilité d'obtenir autant de Face que de Pile.
2) Calculer la probabilité d'obtenir plus de Face que de Pile.

Exercice 4 : ★ Pour remplir une grille au Loto, on doit cocher 5 nombres entre 1 et 49, puis un nombre "chance" entre 1 et 10. Pour gagner le gros lot il faut que les boules tirées correspondent exactement aux numéros (l'ordre du tirage n'est pas important).
1) Calculer la probabilité de gagner le gros lot.
2) Combien de fois faut-il jouer pour gagner le gros lot avec 1 chance sur 2?
Sachant que le gros lot vaut 2 000 000 € et que jouer au Loto coûte 2€, cela est-il rentable? (**Calculatrice**)

Exercice 5 : ★ On lance 5 dés à 6 faces équilibrés. Dans le jeu Yams, on cherche à obtenir 5 fois la même face.
1) Quelle est la probabilité d'obtenir cinq fois la même face?
2) Combien de lancers faut-il faire avant d'obtenir cinq fois la même face avec probabilité $\frac{1}{2}$? (**Calculatrice**)
Dans le jeu, on peut relancer le nombre de dés que l'on souhaite pour un deuxième lancer.
3) On a obtenu un paire de dés égaux dans le lancer. On relance donc les 3 dés restants en esperant obtenir cinq fois la même face. Quelle est la probabilité d'obtenir cinq fois la même face sur ce 2e lancer?
4) A l'aide de la formule des probabilités totales, donner la probabilité d'obtenir cinq fois la même face en deux lancers.

Exercice 6 : ★ On truque un jeu de carte en remplaçant le 2♠ par un A♠. Le jeu comporte donc 2 cartes A♠. On tire quatre cartes.
1) Quelle est la probabilité de tirer un A♠?
2) Quelle est la probabilité de déceler la supercherie en tirant les deux A♠?
3) Au bout de combien de tirages a-t-on 95 % de chances d'avoir décelé la supercherie? (**Calculatrice**)

Exercice 7 : (*Anniversaires* ★★) Dans une classe de 43 élèves,
1) quelle est la probabilité pour qu'un élève ait son anniversaire le même jour que le prof?
2) quelle est la probabilité pour que deux élèves aient leur anniversaire le même jour?
3) Au bout de quel nombre d'élèves cette probabilité dépasse-t-elle les 50 %? (**Calculatrice**)
4) (**Python**) Ecrire un code pour représenter un graphique présentant en abscisse le nombre d'élèves dans la classe et en ordonnée la probabilité que deux élèves aient leur anniversaire le même jour.

Indépendance

Exercice 8 : (*en 1 minute* ♡) On lance un dé équilibré à 6 faces. Les événements suivants sont-ils indépendants? :
1) A : " On obtient le tirage 1" , B : "On obtient le tirage 2"
2) A : " On obtient le tirage 1" , B : "On obtient le tirage 7"
3) A : " On obtient le tirage 1 ou 3 ou 5" , B : "On obtient le tirage 1 ou 2 ou 6"
4) A : " On obtient le tirage 2, 4 ou 6" , B : "On obtient le tirage 3 ou 6"

Exercice 9 : ★★ Une succession d'individus A_1, \dots, A_n se transmet une information binaire du type "oui" ou "non". Chaque individu A_k transmet l'information qu'il a reçue avec la probabilité p à l'individu A_{k+1} ou la transforme en son contraire avec la probabilité $q = 1 - p$. Chaque individu se comporte indépendamment des autres. On note a_n la probabilité que l'information reçue par A_n soit identique à celle émise par A_1

- 1) Trouver une relation de récurrence vérifiée par la suite $(a_n)_n$ et en déduire a_n en fonction de n et p .
- 2) Quelle est la limite de a_n quand n tend vers l'infini ?

Exercice 10 : ★★ Un groupe de n chasseurs tire simultanément et indépendamment sur n canards. Chaque chasseur ne tire qu'une seule fois et atteint toujours sa cible (certes cette hypothèse est discutable).

- 1) Quelle est la probabilité p_n qu'au moins un canard survive? Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$.
- 2) L'un des canards s'appelle Saturnin. Quelle est la probabilité q_n qu'il survive? Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n$.

Probabilités conditionnelles

Exercice 11 : ★ Soit A et B deux évènements tels que $\mathbb{P}(A) > 0$. Comparer $\mathbb{P}_{A \cup B}(A \cap B)$ et $\mathbb{P}_A(A \cap B)$.

Exercice 12 : (Enfants ★) Une mère de famille a deux enfants. On suppose qu'un enfant a probabilité $\frac{1}{2}$ d'être une fille et a probabilité $\frac{1}{2}$ un garçon.

- 1) Quelle est la probabilité pour que les deux soient des filles ?
- 2) Quelle est la probabilité que les deux soient des filles, sachant que l'aînée est une fille ?
- 3) Quelle est la probabilité que les deux soient des filles, sachant que la mère a au moins une fille ?

Exercice 13 : ★ Un fumeur cherche à arrêter de fumer chaque jour. On note p_n la probabilité qu'il fume au jour n .

(*) S'il a réussi à ne pas fumer un jour, il ne fumera pas le lendemain avec probabilité $\frac{1}{2}$

(*) S'il a fumé un jour, il ne fumera pas le lendemain avec probabilité $\frac{1}{4}$

- 1) Trouver une relation entre p_{n+1} et p_n
- 2) Calculer p_n en fonction de p_1 et de n
- 3) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$. Interpréter le résultat.

Exercice 14 : ★★ On dépose trois balles choisies au hasard dans une urne : les balles ont autant de chances d'être bleues que d'être rouges.

- 1) On tire aléatoirement une boule dans l'urne, la boule obtenue est rouge. Quelle est la probabilité :
 - 1.a) Que les trois boules soient rouges ?
 - 1.b) Que deux boules soient bleues et une rouge ?
- 2) On tire successivement n fois et on tombe sur n boules rouges : mêmes questions.
- 3) Quelle est la limite de ces probabilités quand $n \rightarrow +\infty$? Interpréter.

Exercice 15 : ★★ Un animal se promène entre 3 points d'eau A, B, C . Il se trouve au départ au point A et tous les jours, il change de point d'eau, avec probabilité égale de partir vers l'un ou vers l'autre. On note A_n l'évènement : "Au jour n , l'animal est au point d'eau A " et de même on définit B_n et C_n . On note $a_n = \mathbb{P}(A_n)$, $b_n = \mathbb{P}(B_n)$ et $c_n = \mathbb{P}(C_n)$.

- 1) Que valent a_0, b_0 et c_0 ?
- 2) Trouver une relation de récurrence pour exprimer $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ en fonction de a_n, b_n et c_n
- 3) En raisonnant par symétrie, trouver une relation entre c_n et b_n .
- 4) On pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. Trouver une matrice A telle que $X_{n+1} = AX_n$
- 5) En déduire l'expression de X_n en fonction de A, n et X_0
- 6) Montrer que $A^n = \frac{1}{3} \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \left(\frac{-1}{2} \right)^n \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right)$.
- 7) En déduire la valeur de a_n, b_n et c_n en fonction de n et calculer leur limite quand $n \rightarrow +\infty$

Exercice 16 : (Portes et chèvres ★★) Dans un jeu télévisé, derrière trois portes se trouvent respectivement 2 chèvres et une valise avec 100000€. L'objectif de la candidate est de remporter la valise en trouvant la bonne porte. La candidate choisit une porte, disons la porte A . Le présentateur qui sait où est la valise, lui dit alors : "Madame, derrière la porte B se trouve une chèvre, souhaitez vous changer votre choix ?" Est-il dans l'intérêt de la candidate de sélectionner la porte C ?