TD 15 - Probabilités

1BCPST 2 Feuille d'exercice Année 2022- 2023

Les questions nécessitant la calculatrice sont estampillées **(Calculatrice)**

Probabilités

Exercice 1 : *(En 1 minute)* On fait trois lancers d'une pièce équilibrée. Calculer les probabilités des évènements suivants : **1)** Obtenir trois fois Pile **2)** Obtenir Face sur le premier et le deuxième lancers **3)** Obtenir Face sur le premier ou le deuxième lancers **4)** Obtenir Pile au premier et au troisième lancers **5)** Obtenir au moins une fois Face **6)** Obtenir plus de Face que de Pile **7)** Ne pas obtenir trois fois le même résultat. **8)** Ne pas obtenir le même résultat deux fois d'affilé.

....

Réponses : **1)** $\frac{1}{8}$ **2)** $\frac{1}{4}$ **3)** $\frac{3}{4}$ **4)** $\frac{1}{4}$ **5)** $\frac{7}{8}$ **6)** $\frac{1}{2}$ **7)** $\frac{3}{4}$ **8)** $\frac{1}{4}$

Exercice 2 : On tire 4 cartes dans un paquet 52 de cartes. Calculer la probabilité d'obtenir 4 cartes de la même couleur ou de couleur toutes différentes si : **1)** On tire les 4 cartes simultanément
2) On tire les 4 cartes successivement (en retenant l'ordre) dans un tirage sans remise
3) On tire les 4 cartes successivement dans un tirage avec remise.

....

Réponses : On appelle E l'évènement "toutes les cartes ont la même couleur" et E_i : "toutes les cartes ont la i^{eme} couleur". On a $E = \bigcup_{i=1}^{4} E_i$ (union disjointe).
De même on note F : "Toutes les cartes sont de couleur différente" On est dans un cas d'équiprobabilité donc :

1) On a Ω qui représente l'ensemble des tirage possibles de 4 cartes parmis 52 et E_i les tirages qui sont tous de la couleur i. On a donc $\text{Card}(E_i) = \binom{13}{4}$ donc

$$\mathbb{P}(E) = \sum_{i=1}^{4} \mathbb{P}(E_i) = 4\mathbb{P}(E_1) = 4\frac{\text{Card}(E_1)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{4 \cdot \binom{13}{4}}{\binom{52}{4}} = \frac{4 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49} = \frac{4 \cdot 11 \cdot 13}{13 \cdot 17 \cdot 5 \cdot 49} = \boxed{\frac{44}{4165} \simeq 0,01056..}$$

On a $\text{Card}(F) = \binom{13}{1}^4$ car pour chaque couleur on a treize choix de cartes. Cela revient à dire qu'on a tiré une carte parmi treize pour chaque couleur. On a donc $\mathbb{P}(F) = \frac{13^4}{\binom{52}{4}} = \boxed{\frac{13^3}{2^2 \cdot 7^2 \cdot 17} \simeq 0.105498...}$

2) Cette fois l'ordre est important donc les tirages sont des arrangements, plutôt que des combinaisons donc $\text{Card}\Omega = \frac{52!}{(52-4)!} = \frac{52!}{48!}$. De même pour E, l'ordre étant important, on choisit d'abord une couleur, puis un $4-$arrangement parmi les cartes de la couleur donc $\text{Card}(E) = 4 \cdot \frac{13!}{9!}$

Donc $\mathbb{P}(E) = \frac{\text{Card}(E)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{4 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49} = \boxed{\frac{44}{4165}}$. La probabilité est la même que précédemment.

On a cette fois $\text{Card}(F) = 4! \cdot \binom{13}{1}^4$, en effet, comme l'ordre est important, il faut prendre en compte que si le coeur est en premiere position, ce n'est pas la même main que s'il est en deuxième position. On doit donc considérer toutes les permutations possibles pour les couleurs, d'où le 4!. On a alors :

$\mathbb{P}(F) = \boxed{\frac{4! \cdot 13^4}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49} \simeq 0.105498...}$

Remarque : on aurait pu déduire cela du fait que la notion de "couleur" des cartes est indépendante de la notion "d'ordre dans lequel les cartes sont tirées".

3) Cette fois c'est différent, car pour chaque carte tirée, on peut retomber sur toutes les cartes précédemment piochées. Pour un tirage, on a 52 choix pour n'importe quelle carte et donc $\text{Card}(\Omega) = 52^4$. Par ailleurs pour E, on a 4 couleurs possibles, et dès lors qu'une couleur est fixée, on a 13 possibilité par cartes, donc $\text{Card}(E) = 4 \cdot 13^4$. Finalement : $\mathbb{P}(E) = \dfrac{\text{Card}(E)}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{4 \cdot 13^4}{52^4} = 4 \cdot \dfrac{1}{4^4} = \boxed{\dfrac{1}{4^3} \simeq 0.01562...}$

Pour F ça ne change pas des arrangements. En effet, un résultat avec 4 couleurs distinctes est un arrangement car les cartes sont deux à deux distinctes. On a donc $\text{Card}(F) = 4! \cdot \binom{13}{1}^4$.

On a $\mathbb{P}(F) = \dfrac{4! \cdot 13^4}{52^4} \boxed{= \dfrac{3}{2^5} \simeq 0.09375...}$

Exercice 3 : $n \in \mathbb{N}$. On lance une pièce n fois :

1) Calculer la probabilité d'obtenir autant de Face que de Pile.

2) Calculer la probabilité d'obtenir plus de Face que de Pile.

....

Réponses : **1)** On note E : "On obtient autant de Pile que de Face".

On note déjà que si n est impair alors $\mathbb{P}(E) = 0$, car sur un nombre impair de lancer, on ne peut pas obtenir autant de piles et de faces.

Si $n = 2k$ est pair : alors $\mathbb{P}(E) = \dfrac{\text{Card}(E)}{\text{Card}(\Omega)}$. Avec $\text{Card}(\Omega) = 2^n$. En effet, pour chaque lancer, la possibilité est pile ou face : 2 possibilités par lancer, pour n lancers.

Par ailleurs un lancer correspond à E s'il contient autant de Pile que de Face. Cela revient exactement à dire que le lancer contient k fois Pile. Avoir k fois Pile parmi n lancers, ça revient à choisir k lancers parmi les n. Donc il y a autant de lancers correspondants que de manière de choisir k éléments parmi n. On a $\text{Card}(E) = \binom{n}{k}$.

On en déduit $\mathbb{P}(E) = \dfrac{1}{2^n}\binom{n}{k}$ avec $n = 2k$. En conclusion : $\boxed{\mathbb{P}(E) = \begin{cases} \dfrac{1}{4^k}\dbinom{2k}{k} & \text{si } n = 2k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$.

2) On note F : "On obtient strictement plus de Pile que de Face".

On remarque que si on pose G : "On obtient strictement plus de Face que de Pile", alors par symétrie de Pile et Face, on a $\text{Card}(F) = \text{Card}(G)$ (on échange les P en F) c'est à dire $\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(G)$.

Par ailleurs on a $\Omega = E \cup F \cup G$ et cette union est disjointe, donc $\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(G) = \mathbb{P}(E) + 2\mathbb{P}(F)$.

On en déduit : $\mathbb{P}(F) = \dfrac{1 - \mathbb{P}(E)}{2}$.

En conclusion : $\boxed{\mathbb{P}(F) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2^{2k+1}}\dbinom{2k}{k} & \text{si } n = 2k \\ \dfrac{1}{2} & \text{sinon} \end{cases}}$.

Exercice 4 : Pour remplir une grille au Loto, on doit cocher 5 nombres entre 1 et 49, puis un nombre "chance" entre 1 et 10. Pour gagner le gros lot il faut que les boules tirées correspondent exactement aux numéros (l'ordre du tirage n'est pas important).

1) Calculer la probabilité de gagner le gros lot.

2) Combien de fois faut-il jouer pour gagner le gros lot avec 1 chance sur 2 ? Sachant que le gros lot vaut 2 000 000 € et que jouer au Loto coûte 2€, cela est-il rentable ? **(Calculatrice)**

....

Réponses : **1)** Si E : "obtenir le gros lot" alors un seul tirage donne le gros lot, et tous les tirages étant équiprobables :

on a donc $\mathbb{P}(E) = \dfrac{\text{Card}(E)}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{1}{10 \cdot \binom{49}{5}} = \dfrac{4 \cdot 3}{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45} = \dfrac{1}{49 \cdot 12 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 15} \boxed{= \dfrac{1}{19897920} \simeq 5,02565 \cdot 10^{-8}.}$

2) On note $p = P(E)$ et A_n l'évènement : "On tire le gros lot la n-ieme fois qu'on joue". Les évènements (a_i) sont mutuellement indépendants.

On veut que la probabilité de $A = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i$: "On tire le gros lot en jouant fois" soit supérieure à $\dfrac{1}{2}$. On a

$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}\left(\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right) = 1 - \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\overline{A_i}) = 1 - \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(1-p) = 1-(1-p)^n$. Donc $\boxed{\mathbb{P}(A) = 1 - (1-p)^n}$.

On résout donc $1-(1-p)^n \geq \dfrac{1}{2} \iff \dfrac{1}{2} \geq (1-p)^n \iff -\ln 2 \geq n\ln(1-p) \iff -\dfrac{\ln 2}{\ln(1-p)} \leq n \iff n \geq 13792186.8132...$
Donc on doit jouer $\boxed{n = 13\ 792\ 187}$ de fois avant d'avoir le gros lot avec une chance sur deux.
Cela va donc nous coûter 27 millions d'euros, avec l'espoir de gagner $\dfrac{2000000}{2}$ = un million d'euro. Ce n'est pas rentable du tout.

<u>Exercice 5</u> : On lance 5 dés à 6 faces équilibrés. Dans le jeu d Yams, on cherche à obtenir 5 fois la même face.
1) Quelle est la probabilité d'obtenir cinq fois la même face ?
2) Combien de lancers faut-il faire avant d'obtenir cinq fois la même face avec probabilité $\dfrac{1}{2}$? **(Calculatrice)**
Dans le jeu, on peut relancer le nombre de dés que l'on souhaite pour un deuxième lancer.
3) On a obtenu un paire de dés égaux dans le lancer. On relance donc les 3 dés restants en esperant obtenir cinq fois la même face. Quelle est la probabilité d'obtenir cinq fois la même face sur ce 2e lancer ?
4) A l'aide de la formule des probabilités totales, donner la probabilité d'obtenir cinq fois la même face en deux lancers.

....
Réponses :
1) E : "on obtient 5 fois la même face" se décompose en E_i : "on obtient 5 fois la face i" pour $i \in [\![1,6]\!]$.
Par ailleurs, chaque E_i correspond à un unique tirage de dés donc $E_i = \{(i,i,i,i,i)\}$ est de cardinal 1.
On en déduit : $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{6} E_i\right) = \sum_{i=1}^{6}\mathbb{P}(E_i) = \sum_{i=1}^{6}\dfrac{1}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{6}{6^5} = \boxed{\dfrac{1}{6^4} \simeq 0.0007716..}$.
2) Même raisonnement que l'exercice précédent sur la question 2. On pose A : "On obtient cinq fois la même faces en jouant n fois". On a alors : $\mathbb{P}(A) = 1-(1-p)^n$ où $p = \mathbb{P}(E) = \dfrac{1}{6^4}$ (voir l'exercice précédent.)
On résout donc comme précédemment $-\dfrac{\ln 2}{\ln(1-p)} \leq n \iff n \geq 897,97212....$ Donc on doit jouer $\boxed{n = 898}$ fois avant d'avoir l'évènement A.

3) La paire de dés égaux étant fixée, la probabilité que ces trois dés tombent sur la valeur affichée par les deux dés fixés donne : $\boxed{\dfrac{1}{6^3}}$.
4) Question difficile : On sépare En plusieurs évènements possibles le premier lancer : A_i : "Au terme du premier lancer, on a au maximum i dés identiques". pour $i \in [\![1,5]\!]$
On note G : "On gagne suite à une relance". $\mathbb{P}(A_5) = \mathbb{P}(E) = \dfrac{1}{6^4}$.
Par ailleurs, $\mathbb{P}(A_4) = \dfrac{6\cdot 5}{6^5}\binom{5}{4} = \dfrac{25}{6^4}$: On sélectionne 4 dés avec la même face (6 possibilités pour cette face et $\binom{5}{4}$ possibilité pour le choix des dés) puis un dé qui a une autre face parmi les faces 5 restantes
De même $\mathbb{P}(A_3) = \dfrac{6\cdot 5^2}{6^5}\binom{5}{3} = \dfrac{250}{6^4}$: On sélectionne 3 dés avec la même face puis deux dés qui ont d'autres faces parmi les 5 restantes.
Ensuite, $\mathbb{P}(A_2) = \dfrac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{6^5}\binom{5}{2} + \dfrac{6\cdot 5\cdot 4}{6^5}\binom{5}{1}\binom{4}{2} = \dfrac{660}{6^4}$: On sélectionne 2 dés avec la même face puis parmi les trois dés restants : 2 possibilités, soit les dés ont tous une face différente, soit deux dés ont la même face (on en choisit alors 1 parmi les 5 qui a une face unique (6 choix de face) puis 2 parmi les 4 restant qui ont la même face (5 choix de face) et les deux derniers ont la même face (4 choix de face)).
Enfin, $\mathbb{P}(A_1) = \dfrac{6!}{6^5}\binom{5}{1} = \dfrac{600}{6^4}$ Tous les dés ont une face différente.
Dans le cas où on a i dés identiques, pour gagner au lancer suivant, il faut relancer $5-i$ dés et espérer gagner, donc d'après les probabilités totales, on a :
$\mathbb{P}(G) = \sum_{i=1}^{5}\mathbb{P}(A_i\cap G) = \sum_{i=1}^{5}\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(G) = \dfrac{1}{6^4}\left(\dfrac{600}{6^4} + \dfrac{1200}{6^3} + \dfrac{250}{6^2} + \dfrac{25}{6} + 1\right) = \dfrac{3376}{6^7}$

- Finalement $\boxed{\mathbb{P}(G) = \dfrac{3376}{6^7} \simeq 0.01205...}$.

Exercice 6 : On truque un jeu de carte en remplaçant le 2♠ par un A♠. Le jeu comporte donc 2 cartes A♠. On tire quatre cartes.
1) Quelle est la probabilité de tirer un A♠ ?
2) Quelle est la probabilité de déceler la supercherie en tirant les deux A♠ ?
3) Au bout de combien de tirages a-t-on 95 % de chances d'avoir décelé la supercherie ? **(Calculatrice)**

. . . .

Réponses : **1)** L'évènement complémentaire est : $\overline{E}$: "on ne tire pas d'as de pique". On a donc $\mathbb{P}(E) = 1 - \mathbb{P}(\overline{E}) = 1 - \dfrac{\binom{50}{4}}{\binom{52}{4}} = \boxed{1 - \dfrac{4 \cdot 47}{13 \cdot 17} \simeq 0.14932...}$

2) Pour déceler le problème, il faut piocher les deux as dans la même main, donc la probabilité est
$\mathbb{P}(F) = \dfrac{\binom{50}{2}}{\binom{52}{4}} = \dfrac{4 \cdot 3}{52 \cdot 51} = \boxed{\dfrac{1}{13 \cdot 17} \simeq 0.0045...}$

3) Même raisonnement que sur la question 2 des deux exercices précédents. On note $\mathbb{P}(F) = p$ et on note A : "On trouve la supercherie au bout de n tirages".
D'après les exercices précédents, on trouve : $\mathbb{P}(A) = 1 - (1-p)^n$ donc $\mathbb{P}(A) \geq 0.05 \iff n \geq \dfrac{\ln(0.05)}{\ln(1-p)} =$ 660.557.... Visiblement donc, le tour aura 95% de chances d'être décelé au bout de $\boxed{n = 661}$ tirages.

Exercice 7 : *(Anniversaires)* Dans une classe de 43 élèves,
1) quelle est la probabilité pour qu'un élève ait son anniversaire le même jour que le prof ?
2) quelle est la probabilité pour que deux élèves aient leur anniversaire le même jour ?
3) Au bout de quel nombre d'élèves cette probabilité dépasse-t-elle les 50 % ? **(Calculatrice)**

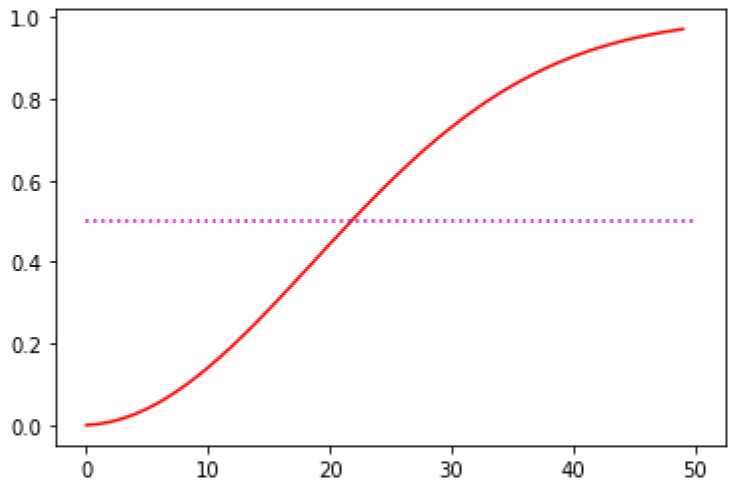
. . . .

Réponses : **1)** On note A_i : "le i^e élève a son anniversaire le même jour que le prof". On cherche $\mathbb{P}(A)$ où $A = \bigcup i = 1^{43} A_i$. On a $\mathbb{P}(A_i) = \dfrac{1}{365} = p$. Les évènements A_i sont mutuellement indépendants, donc $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{43} A_i\right) = 1 - (1-p)^{43}$ d'après la formule sur l'union d'évènements indépendants. En conclusion :

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^{43} \simeq 0.111...}$$

2) Note E : "deux élèves ont leur anniversaire le même jour". On a $\overline{E}$: "tous les élèves ont une date d'anniversaire différente".
Pour réaliser l'évènement $\overline{E}$, cela revient à dire qu'on a une fonction injective qui, à chaque élève associe une date d'anniversaire. Le nombre de fonctions injectives correspond au nombre d'arrangements. La probabilité de $\overline{E}$ est plus facile à calculer que celle de E :
$\mathbb{P}(\overline{E}) = \dfrac{365!}{(365-43)! \cdot 365^{43}} = \dfrac{365}{365} \cdot \dfrac{364}{365} \cdot \ldots \cdot \dfrac{365-43}{365} = 0.076....$ On en déduit $\boxed{\mathbb{P}(E) = 1 - \mathbb{P}(\overline{E}) = 0.9239...}$

3) Pour n élèves la formule est $\mathbb{P}(E) = 1 - \mathbb{P}(\overline{E}) = 1 - \dfrac{365!}{(365-n)! \cdot 365^n}$. Il faut donc faire une boucle pour calculer cette probabilité, et ajouter un élève tant que la probabilité est en dessous de 1/2. On trouve $\boxed{n = 22}$. Au bout de 22 élèves on a plus d'une chance sur deux d'avoir deux élèves avec le même anniversaire.
Voici la représentation graphique de $\mathbb{P}(E)$ en fonction du nombre d'élève n. On voit qu'elle dépasse $0,5$ autour de 22 élèves :



Indépendance

Exercice 8 : *(en 1 minute)* On lance un dé équilibré à 6 faces. Les évenèments suivants sont-ils indépendants ? :
1) A : " On obtient le tirage 1" , B : "On obtient le tirage 2"
2) A : " On obtient le tirage 1" , B : "On obtient le tirage 7"
3) A : " On obtient le tirage 1 ou 3 ou 5" , B : "On obtient le tirage 1 ou 2 ou 6"
4) A : " On obtient le tirage 2, 4 ou 6" , B : "On obtient le tirage 3 ou 6"
....
Réponses : **1)** $\mathbb{P}(A) = \dfrac{1}{6}$, $\mathbb{P}(B) = \dfrac{1}{6}$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = 0 \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ donc $\boxed{\text{non indépendants}}$
2) $\mathbb{P}(A) = \dfrac{1}{6}$, $\mathbb{P}(B) = 0$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = 0 = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ donc $\boxed{\text{indépendants}}$
3) $\mathbb{P}(A) = \dfrac{1}{2}$, $\mathbb{P}(B) = \dfrac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = \dfrac{1}{6} \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ donc $\boxed{\text{non indépendants}}$
4) $\mathbb{P}(A) = \dfrac{1}{2}$, $\mathbb{P}(B) = \dfrac{1}{3}$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = \dfrac{1}{6} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ donc $\boxed{\text{indépendants}}$

Exercice 9 : Une succession d'individus $A_1, \dots, A_n$ se transmet une information binaire du type "oui" ou "non". Chaque individu A_k transmet l'information qu'il a reçue avec la probabilité p à l'individu A_{k+1} ou la transforme en son contraire avec la probabilité $q = 1 - p$. Chaque individu se comporte indépendamment des autres.
1) Calculer la probabilité a_n pour que l'information reçue par A_n soit identique à celle émise par A_1.
2) Quelle est la limite de a_n quand n tend vers l'infini ?
....
Réponses : **1)** D'après les probabilités totales, on a :
$a_{n+1} = \mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) + \mathbb{P}(\overline{A_n})\mathbb{P}_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = a_n \cdot p + (1 - a_n) \cdot (1 - p) = 1 - p + (2p - 1)a_n$.
$\boxed{a_{n+1} = (2p - 1)a_n + 1 - p}$ est donc une suite arithmético-géométrique.
On résout : $\ell = (2p - 1)\ell + 1 - p \iff \ell = \dfrac{1}{2}$. On a donc $(a_n - \ell)_n$ une suite géométrique de raison $(2p - 1)$ et $a_n - \ell = (2p - 1)^n(a_0 - \ell) = \dfrac{(2p - 1)^n}{2}$ car $a_0 = 1$.
On a donc finalement $\boxed{a_n = \dfrac{(2p - 1)^n + 1}{2}}$
2) On a $0 \leq p \leq 1 \implies 0 \leq 2p \leq 2 \implies 0 \leq 2p - 1 \leq 1$.
Donc si $p = 1$, on a $a_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Sinon, on a $0 \leq (2p - 1) < 1$ donc $\boxed{a_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}}$

Exercice 10 : Un groupe de n chasseurs tire simultanément et indépendamment sur n canards. Chaque chasseur ne tire qu'une seule fois et atteint toujours sa cible (certes cette hypothèse est discutable).

1) Quelle est la probabilité p_n qu'au moins un canard survive ? Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.
2) L'un des canards s'appelle Saturnin. Quelle est la probabilité q_n qu'il survive ? Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n$.

. . . .

Réponses : **1)** On note E :"un canard survit". L'évènement complémentaire $\overline{E}$ est :"tous les canards sont tués". L'évènement $\overline{E}$ est plus facile a calculer.
En effet, si tous les canards sont mort, ça veut dire que chaque chasseur a choisi un unique canard. Cela correspond à une bijection : à chaque chasseur correspond un unique canard et à chaque canard correspond un bourreau chasseur. On a donc $\text{Card}(\overline{E}) = n!$

Ω correspond à toutes les façons possibles qu'ont les chasseurs de choisir un canard. C'est le nombre de fonctions qui à un chasseur associe un canard. Comme il y a n chasseurs et n canards, $\text{Card}(\Omega) = n^n$.
Finalement $p_n = \mathbb{P}(E) = 1 - \mathbb{P}(\overline{E}) = \boxed{1 - \dfrac{n!}{n^n}}$ On en déduit que $\boxed{p_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1}$
2) La probabilité que Saturnin survive correspond à l'évènement où tous les chasseur ont tiré un canard parmi les $n-1$ autres canards. On a donc $\boxed{q_n = \dfrac{(n-1)^n}{n^n} = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n}$.
On a $q_n = \exp\left(n \ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)\right)$. Or $\ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) \sim -\dfrac{1}{n}$ (voir chapitre sur les dérivées). On en déduit $\boxed{q_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}}$.

Probabilités conditionnelles

Exercice 11 : Soit A et B deux évènements tels que $\mathbb{P}(A) > 0$. Comparer $\mathbb{P}_{A\cup B}(A \cap B)$ et $\mathbb{P}_A(A \cap B)$.

. . . .

Réponses : $\mathbb{P}_{A\cup B}(A \cap B) = \dfrac{\mathbb{P}((A\cup B) \cap (A \cap B))}{\mathbb{P}(A \cup B)} = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A \cup B)}$ et $\mathbb{P}_A(A \cap B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$.
Donc $\mathbb{P}_{A\cup B}(A \cap B) = \mathbb{P}_A(A \cap B)\dfrac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A \cup B)}$. Or $A \subset A \cup B \implies \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(A \cup B)$. On trouve donc $\boxed{\mathbb{P}_{A\cup B}(A \cap B) \leq \mathbb{P}_A(A \cap B)}$

Exercice 12 : *(Enfants)* Une mère de famille a deux enfants. On suppose qu'un enfant a probabilité $\dfrac{1}{2}$ d'être une fille et a probabilité $\dfrac{1}{2}$ un garçon.
1) Quelle est la probabilité pour que les deux soient des filles ?
2) Quelle est la probabilité que les deux soient des filles, sachant que l'ainée est un fille ?
3) Quelle est la probabilité que les deux soient des filles, sachant que la mère a au moins une fille ?

. . . .

Réponses : On note F_i : "la probabilité que le i^e enfant soit une fille.
1) $\mathbb{P}(F_1 \cap F_2) = \mathbb{P}(F_1)\mathbb{P}(F_2) = \boxed{\dfrac{1}{4}}$
2) $\mathbb{P}_{F_1}(F_1 \cap F_2) = \dfrac{\mathbb{P}((F_1 \cap F_2) \cap F_1)}{\mathbb{P}(F_1)} = \dfrac{\mathbb{P}(F_1 \cap F_2)}{\mathbb{P}(F_1)} = \dfrac{1/4}{1/2} = \boxed{\dfrac{1}{2}}$.
3) $\mathbb{P}_{F_1\cup F_2}(F_1 \cap F_2) = \dfrac{\mathbb{P}((F_1 \cap F_2) \cap (F_1 \cup F_2)))}{\mathbb{P}(F_1 \cup F_2)} = \dfrac{\mathbb{P}(F_1 \cap F_2)}{\mathbb{P}(F_1 \cup F_2)} = \dfrac{1/4}{3/4} = \boxed{\dfrac{1}{3}}$

Exercice 13 : Un fumeur cherche à arrêter de fumer chaque jour. On note p_n la probabilité qu'il fume au jour n.
★ S'il a réussi à ne pas fumer un jour, il ne fumera pas le lendemain avec probabilité $\dfrac{1}{2}$
★ S'il a fumé un jour, il ne fumera pas le lendemain avec probabilité $\dfrac{1}{4}$

1) Trouver une relation entre p_{n+1} et p_n
2) Calculer p_n en fonction de p_1 et de n
3) Calculer $\lim_{n\to+\infty} p_n$. Interpréter le résultat.
. . . .

Réponses : On note F_n :"le fumeur fume au jour n".
1) Cet exercice ressemble à l'exercice 9. On utilise les probabilités totales :
$p_{n+1} = \mathbb{P}(F_{n+1}) = \mathbb{P}(F_n)\mathbb{P}_{F_n}(F_{n+1})+\mathbb{P}(\overline{F_n})\mathbb{P}_{\overline{F_n}}(F_{n+1}) = \dfrac{3}{4}p_n+\dfrac{1}{2}(1-p_n) = \dfrac{1}{4}p_n+\dfrac{1}{2}$. Donc $\boxed{p_{n+1} = \dfrac{1}{4}p_n + \dfrac{1}{2}}$.
2) On a une suite arithmético-géométrique. On résout : $\ell = \dfrac{1}{4}\ell + \dfrac{1}{2}$ et on trouve $\ell = \dfrac{2}{3}$. On a donc $(p_n - \ell)_n$ une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$ et $p_n - \ell = \dfrac{1}{4^{n-1}}(p_1 - \ell)$ Donc $\boxed{p_n = \dfrac{3p_1 - 2}{3 \cdot 4^{n-1}} + \dfrac{2}{3}}$.
3) On a $\boxed{p_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{2}{3}}$. Le fumeur va donc fumer en moyenne deux jours sur 3.... Ce qui n'est pas forcément une bonne nouvelle.

<u>Exercice 14</u> : On dépose trois balles choisies au hasard dans une une urne : les balles ont autant de chances d'être bleues que d'être rouges.
1) On tire aléatoirement une boule dans l'urne, la boule obtenue est rouge. Quelle est la probabilité :
. **1.a)** Que les trois boules soient rouges ?
. **1.b)** Que deux boules soient bleues et une rouge ?
2) On tire successivement n fois avec remise et on tombe sur n boules rouges : mêmes questions.
3) Quelle est la limite de ces probabilités quand $n \to +\infty$? Interpréter.
. . . .

Réponses : On note R_3 l'évènement : "les trois boules sont rouges" et R_1 : "une des trois boules sont rouges". On note E l'évènement : "la boule tirée est rouge" et E_n : "les n boules tirées sont rouges." **1) a)** La probabilité de tirer une rouge en premier est $\mathbb{P}(E) = \dfrac{1}{2}$ car il y a symétrie entre les boules bleues et rouges.
Par ailleurs, la probabilité d'avoir trois rouges est $P(R_3) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{8}$.
Donc d'après la formule de Bayes : $\mathbb{P}_E(R_3) = \dfrac{\mathbb{P}(R_3)}{\mathbb{P}(E)}\mathbb{P}_{R_3}(E) = \dfrac{1/8}{1/2} \times 1 = \boxed{\dfrac{1}{4}}$
. **1.b)** La seule chose qui change est $\mathbb{P}(R_1) = \dfrac{3}{8}$ (3 cas favorables : BBR BRB RBB sur 8 cas en tout). On a ainsi : $\mathbb{P}_E(R_1) = \dfrac{\mathbb{P}(R_1)}{\mathbb{P}(E)}\mathbb{P}_{R_1}(E) = \dfrac{3/8}{1/2} \times \dfrac{1}{3} = \boxed{\dfrac{1}{4}}$
2) a) On va calculer $P(E_n)$ en utilisant le système complet d'évènements R_i avec $i \in [\![0,3]\!]$ où R_i est l'évènement : " L'urne contient i boules rouges".
On a $\mathbb{P}(R_0) = \mathbb{P}(R_3) = \dfrac{1}{8}$ et $\mathbb{P}(R_1) = \mathbb{P}(R_2) = \dfrac{3}{8}$.
Ainsi $\mathbb{P}(E_n) = \displaystyle\sum_{i=0}^{3} \mathbb{P}(R_i)\mathbb{P}_{R_i}(E_n) = \dfrac{1}{8}\mathbb{P}_{R_0}(E_n) + \dfrac{3}{8}\mathbb{P}_{R_1}(E_n) + \dfrac{3}{8}\mathbb{P}_{R_2}(E_n) + \dfrac{1}{8}\mathbb{P}_{R_3}(E_n)$
$= \dfrac{1}{8} + \dfrac{3}{8}\dfrac{1}{3^n} + \dfrac{3}{8}\dfrac{2^n}{3^n} + 0 = \dfrac{3^{n-1} + 1 + 2^n}{8 \cdot 3^{n-1}}$
Donc $\mathbb{P}_{E_n}(R_3) = \dfrac{\mathbb{P}(R_3)}{\mathbb{P}(E_n)}\mathbb{P}_{R_3}(E_n) = \dfrac{1/8}{(3^{n-1} + 1 + 2^n)/(8 \cdot 3^{n-1})} = \boxed{\dfrac{3^{n-1}}{3^{n-1} + 1 + 2^n}}$
. **2.b)** On a $\mathbb{P}_{E_n}(R_1) = \dfrac{\mathbb{P}(R_1)}{\mathbb{P}(E_n)}\mathbb{P}_{R_1}(E_n) = \dfrac{3/8}{(3^{n-1} + 1 + 2^n)/(8 \cdot 3^{n-1})}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n = \boxed{\dfrac{1}{3^n + 3 + 3 \cdot 2^n}}$
3) On a $\mathbb{P}_{E_n}(R_3) \sim \dfrac{3^{n-1}}{3^{n-1}} = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc la probabilité tend vers 1. C'est logique : si on tire un très grand nombre de boules rouges sans jamais tirer de bleue, il est très probable que toutes les boules soient rouges. Le même raisonnement devrait donc donner que l'autre probabilité tend vers zéro, et effectivement, on a $\mathbb{P}_{E_n}(R_1) \sim \dfrac{1}{3^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 15 : Un animal se promène entre 3 points d'eau A, B, C. Il se trouve au départ au point A et tous les jours, il change de point d'eau, avec probabilité égale de partir vers l'un ou vers l'autre.

On note A_n l'évènement : "Au jour n, l'animal est au point d'eau A" et de même on définit B_n et C_n.
On note $a_n = \mathbb{P}(A_n)$, $b_n = \mathbb{P}(B_n)$ et $c_n = \mathbb{P}(C_n)$.

1) Que valent a_0, b_0 et c_0 ?
2) Trouver une relation de récurrence pour exprimer a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n
3) En raisonnant par symétrie, trouver une relation entre c_n et b_n.
4) On pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. Trouver une matrice A telle que $X_{n+1} = AX_n$
5) En déduire l'expression de X_n en fonction de A, n et X_0
6) Montrer que $A^n = \frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \left(\frac{-1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right)$.
7) En déduire la valeur de a_n, b_n et c_n en fonction de n et calculer leur limite quand $n \to +\infty$

. . . .

Réponses : **1)** $a_0 = 1, b_0 = 0$ et $c_0 = 0$
2) On utilise les probabilités totales :
$a_{n+1} = \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) + \mathbb{P}(B_n)\mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1}) + \mathbb{P}(C_n)\mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1}) = a_n \cdot 0 + \frac{b_n}{2} + \frac{c_n}{2}$

On a donc $\boxed{\begin{cases} a_{n+1} = \frac{b_n}{2} + \frac{c_n}{2} \\ b_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{c_n}{2} \\ c_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2} \end{cases}}$

3) Comme on a $b_0 = c_0$, les points B et C sont symétriques, c'est à dire à n'importe quel moment, la probabilité d'être en B est la même que celle d'être en C. On a donc $\boxed{c_n = b_n}$

4) On peut simplifier les relations de récurrence au dessus : $\boxed{\begin{cases} a_{n+1} = b_n \\ b_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2} \end{cases}}$. On trouve $X_{n+1} = AX_n$ avec $\boxed{A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$. **5)** On a $\boxed{X_n = A^n X_0}$ par récurrence immédiate.
6) on montre cela par récurrence.
7) On a $A^n = \frac{1}{3 \cdot 2^n}\begin{pmatrix} 2^n + 2 \cdot (-1)^n & 2^{n+1} + 2 \cdot (-1)^{n+1} \\ 2^n + (-1)^{n+1} & 2^{n+1} + (-1)^{n+1} \end{pmatrix}$
Donc $X_n = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ donne $a_n = \frac{2^n + 2 \cdot (-1)^n}{3 \cdot 2^n} = \frac{1}{3} + \frac{(-1)^n}{3 \cdot 2^n}$ et $b_n = \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3 \cdot 2^n}$
Finalement $\boxed{a_n = \frac{1}{3} + \frac{(-1)^n}{3 \cdot 2^{n-1}} \text{ et } b_n = c_n = \frac{1}{3} + \frac{(-1)^{n+1}}{3 \cdot 2^n}}$ On en déduit que les trois convergent vers $\boxed{\frac{1}{3}}$.

Exercice 16 : *(Portes et chèvres)* Dans un jeu télévisé, derrière trois portes se trouvent respectivement 2 chèvres et une valise avec 100000€. L'objectif de la candidate est de remporter la valise en trouvant la bonne porte.
La candidate choisit une porte, disons la porte A. Le présentateur qui sait où est la valise, lui dit alors : "Madame, derrière la porte B se trouve une chèvre, souhaitez vous changer votre choix ?"
Est-il dans l'intérêt de la candidate de sélectionner la porte C ?.

. . . .

Réponses : La difficulté de cet exercice est qu'il faut bien modéliser le problème.
On note E_i :"la porte i contient l'argent" On a clairement $\mathbb{P}(E_A) = \frac{1}{3}$. Cependant, quand le présentateur propose à la candidate de changer, il dit "je vous révèle que nous sommes dans l'évènement $\overline{E_B}$" dès lors compter probabilité d'avoir l'argent derrière la porte C revient à calculer

$$\mathbb{P}_{\overline{E_b}}(E_C) = \frac{\mathbb{P}(E_C \cap \overline{E_B})}{\mathbb{P}(\overline{E_B})} = \frac{\mathbb{P}(E_C)}{\mathbb{P}(\overline{E_B})} = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}.$$

Il est donc plus intéressant de changer de porte car $\boxed{\mathbb{P}_{\overline{E_b}}(E_C) > \mathbb{P}(E_A)}$