TD 17 - Espaces vectoriels

1BCPST 2 — Feuille d'exercice — Année 2023- 2024

Familles de vecteurs

Exercice 1 : *(en 1 minute ♡)* Dire si ces vecteurs forment une famille libre ou non :

1) $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ **2)** $\begin{pmatrix}1\\5\\1\\2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}2\\6\\1\\2\end{pmatrix}$ **3)** $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\3\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}2\\-2\\2\\6\end{pmatrix}$ **4)** $(1,2,3)$, $(1,-2,3)$ **5)** $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$et $\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$ **7)** $\begin{pmatrix}48\\25\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}78\\71\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}19\\7\end{pmatrix}$ **8)** $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}$ **9)** $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$

Exercice 2 : *(en 1 minute ♡)* Dire si ces vecteurs forment une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$ ou non :

$n=2$: **1)** $\begin{pmatrix}48\\25\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}78\\71\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}19\\7\end{pmatrix}$ **2)** $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$et $\begin{pmatrix}1\\15\end{pmatrix}$ **3)** $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$et $\begin{pmatrix}3\\45\end{pmatrix}$ **4)** $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$et $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$n=3$: **5)** $\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\7\\0\end{pmatrix}$ **6)** $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ **7)** $(1,1,1),(1,1,0)$ et $(1,-1,0)$

Exercice 3 : ★ Pour toutes les familles de vecteurs suivantes, dire si elles sont une une famille libre, génératrice ou une base de E. **1)** $E=\mathbb{C}^2$: $\begin{pmatrix}1\\2i\end{pmatrix}$et $\begin{pmatrix}3i\\-6\end{pmatrix}$ **2)** $E=\mathbb{C}^3$: $\begin{pmatrix}1\\i\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\i\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}i\\0\\1\end{pmatrix}$.

3) $E=\mathbb{R}^4$: $\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$. **4)** $E=\mathbb{R}^5$: $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\2\\2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\0\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\-2\\-2\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Exercice 4 : ★★ Soit $(u_1, \dots u_p) \in \mathbb{R}^n$ une famille de vecteurs. Pour $k \in [\![1,p]\!]$, on pose $v_k = \sum_{i=1}^{k} u_i$.
Montrer que $(u_1, \dots u_p)$ est libre si et seulement si $(v_1, \dots, v_p)$ est libre

Exercice 5 : ★ Compléter les famille libres suivantes en base de $\mathbb{K}^n$:

1) $\mathbb{K}^n = \mathbb{R}^3$ et $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ **2)** $\mathbb{K}^n = \mathbb{R}^4$ et $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ **3)** $\mathbb{K}^n = \mathbb{C}^4$ et $\begin{pmatrix}i\\1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\i\end{pmatrix}$

Exercice 6 : ★
Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour quelles valeurs de a la famille formée par les vecteurs $\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\a\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\1\\a\end{pmatrix}$ est elle libre ?

Exercice 7 : ★ Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour quelles valeurs de a la famille formée par les vecteurs
$\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\0\\a\end{pmatrix}$ est elle une base de $\mathbb{R}^3$? Dans ce cas, exprimer la base canonique dans cette base.

Exercice 8 : ★ **1)** Montrer que $e_1 = (1,1,1)$, $e_2 = (1,1,0)$, $e_3 = (1,0,-1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2) On pose $B = (e_1, e_2, e_3)$ et B_c la base canonique. Calculer $\mathrm{Mat}_{B_c}(B)$ et $\mathrm{Mat}_B(B_c)$.
3) Donner les coordonnées de $(9,5,2)$ dans cette base.

Espaces vectoriels

Exercice 9 : ★ Donner une bases des espaces vectoriels suivants :
1) $\text{Vect}((1,1,2),(1,1,3),(0,0,1))$ **2)** $\text{Vect}((0,1,0,2),(1,0,3,1),(1,1,1,1),(0,1,0,1),(1,2,3,4))$
3) $\text{Vect}(\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix})$ **4)** $\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ **5)** $\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 2i \end{pmatrix}\right)$

Exercice 10 : ★ - ★★ Les ensembles E suivants sont-ils des sous espace vectoriels de $\mathbb{R}^n$? Si oui, trouver une base et leur dimension. (Pour le 8) on se demandera si E est un sev de $\mathbb{C}^4$)

$\boxed{n=3}$ **1)** $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left\{ \begin{array}{c} x+y+z=0 \\ x+2y+3z=0 \end{array} \right. \right\}$ **2)** $E = \{(1+t, t, 1-t) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}\}$

3) $E = \{(t+s, s-t, s) \in \mathbb{R}^3 \mid (s,t) \in \mathbb{R}^2\}$ **4)** $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left\{ \begin{array}{c} x+2z=1 \\ y+z=1 \end{array} \right. \right\}$

5) $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid xyz = 0\}$ **6)** $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + (y-z)^2 = 0\}$

$\boxed{n=4}$ **7)** $E = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid \left\{ \begin{array}{c} x-3y+2z+t=0 \\ 2x+2y+2z-t=0 \end{array} \right. \right\}$ **8)** $E = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{C}^4 \mid \left\{ \begin{array}{c} x+iy+t=0 \\ ix+y-t=0 \\ z+it=0 \end{array} \right. \right\}$

Exercice 11 : *(Intersections ★★)* On donne $E = \text{Vect}((1,1,1,0),(1,-1,0,1),(1,0,1,1))$,
$F = \text{Vect}((1,2,3,4),(-1,-1,1,1))$ et $G = \text{Vect}((-1,0,5,6),(1,0,0,1))$.
Calculer la dimension de $E \cap F$, $E \cap G$, $F \cap G$ et $E \cap F \cap G$.

Exercice 12 : ★ On pose $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z=0 \text{ et } 2x+y+z-t=0\}$ et
$G = \text{Vect}((1,-2,1,1),(1,2,-3,1),(5,-3,-2,5))$.
1) Justifier que F et G sont des sev de $\mathbb{R}^4$ et donner leur dimension.
2) Montrer que $G \subset F$. En déduire que $G = F$.

Exercice 13 : ★ On pose $v_1 = (1,1,1,1)$, $v_2 = (1,2,3,4)$, $v_3 = (3,1,4,2)$, $v_4 = (10,4,13,7)$, $v_5 = (1,7,8,14)$. **1)** La famille de cinq vecteurs est-elle libre ? Quel est son rang ?
2) Extraire de cette famille une base B de $E = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$.
3) Compléter B pour obtenir une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 14 : ★★ Si E et F sont deux sev de $\mathbb{K}^n$, on définit $E + F = \{x + y \mid x \in E \text{ et } y \in F\}$
1) Montrer que $E + F$ est un sev de $\mathbb{K}^n$
2) Exemple concret : On pose $E = \text{Vect}((1,1,1),(1,1,0))$ et $F = \text{Vect}((1,0,0),(0,0,1))$, quel est l'espace vectoriel $E + F$? Donner une base de $E + F$. Dans la suite E et F sont deux sev quelconques.
3) Si $E = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ et $F = \text{Vect}(f_1, \dots, f_n)$, montrer que $E + F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_n)$
4) On suppose que $E \cap F = \{0\}$, calculer dim $(E + F)$ en fonction des dimensions de E et de F.
5) Calculer dim $(E + F)$ dans le cas général. Comparer avec la question 2).
6) Montrer que $E + F$ est le plus petit espace vectoriel au sens de l'inclusion contenant $E \cup F$.
7) En utilisant la question précédente, interpréter le résultat de la question 5).

Exercice 15 : ★★ On se place dans E un sous espace-vectoriel de $\mathbb{K}^n$ de dimension 2.
Montrer qu'il existe F, G, et H des sous espace-vectoriel non nuls de E tels que :
$F + G = F + H = G + H = E$ et $F \cap G = G \cap H = F \cap H = \{0\}$

Exercice 16 : ★★ Si E et F sont deux sev de $\mathbb{K}^n$,
Montrer que $E \cup F$ est un sev de $\mathbb{K}^n$ si et seulement si $E \subset F$ ou $F \subset E$.