TD 16 - Espaces vectoriels

1BCPST 2 Feuille d'exercice Année 2022- 2023

Familles de vecteurs

Exercice 1 : *(en 1 minute)* Dire si ces vecteurs forment une famille libre ou non :

1) $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ **2)** $\begin{pmatrix}1\\5\\1\\2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}2\\6\\1\\2\end{pmatrix}$ **3)** $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\3\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}2\\-2\\2\\6\end{pmatrix}$ **4)** $(1,2,3)$, $(1,-2,3)$ **5)** $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$et $\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$ **7)** $\begin{pmatrix}48\\25\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}78\\71\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}19\\7\end{pmatrix}$ **8)** $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}$ **9)** $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$

....

Réponses : **1)** Non (il y a 0) **2)** Oui (ils sont non conlinéaires) **3)** Non (ils sont conlinéaires)
4) Oui (ils sont non conlinéaires) **5)** Oui (ils sont non conlinéaires) **6)** Oui (ils sont trianguliares)
7) Non (ils sont trois dans $\mathbb{R}^2$) **8)** Non (le 1er moins le 2e est colinéaire au 3e)

9) Non car $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = 0$

Exercice 2 : *(en 1 minute)* Dire si ces vecteurs forment une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$ ou non :

$n = 2$: **1)** $\begin{pmatrix}48\\25\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}78\\71\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}19\\7\end{pmatrix}$ **2)** $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$et $\begin{pmatrix}1\\15\end{pmatrix}$ **3)** $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$et $\begin{pmatrix}3\\8\end{pmatrix}$ **4)** $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$et $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$n = 3$: **5)** $\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\7\\0\end{pmatrix}$ **6)** $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ **7)** $(1,1,1), (1,1,0)$ et $(1,-1,0)$

....

Réponses : **1)** Oui (il y a au moins deux vecteurs non colinéaires) **2)** Oui (même raison)
3) Non (colinéaires donc engendrent un espace de dimension 1) **4)** Non (même raison)
5) Non (coplanaires donc engendrent un espace de dimension 2) **6)** Non (pas assez de vecteurs)
7) Oui (Famille libre de trois vecteurs donc base)

Exercice 3 : Pour toutes les familles de vecteurs suivantes, dire si elles sont une une famille libre, génératrice ou une base de E. **1)** $E = \mathbb{C}^2$: $\begin{pmatrix}1\\2i\end{pmatrix}$et $\begin{pmatrix}3i\\-6\end{pmatrix}$ **2)** $E = \mathbb{C}^3$: $\begin{pmatrix}1\\i\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\i\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}i\\0\\1\end{pmatrix}$.

3) $E = \mathbb{R}^4$: $\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\2\\2\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\2\\0\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\3\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$. **4)** $E = \mathbb{R}^5$: $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\2\\2\\2\\1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1\\2\\0\\2\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\\-2\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$.

....

Réponses : **1)** Les vecteurs sont colinéaires : $\begin{pmatrix}3i\\-6\end{pmatrix} = 3i\begin{pmatrix}1\\2i\end{pmatrix}$ donc ni libre, ni génératrice ni une base.

2) On a $\text{rg}\begin{pmatrix}1 & 0 & i\\ i & 1 & 0\\ 0 & i & 1\end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix}1 & 0 & i\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & i & 1\end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix}1 & 0 & i\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix} = 3$ Donc la famille est libre, c'est une base car elle possède 3 vecteurs et donc elle est aussi génératrice.

3) Elle n'est pas libre, car elle possède 5 vecteurs, ce n'est donc pas une base non plus. Par ailleurs :

$$\text{rg}\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&2&3&-1&2\\0&0&3&0&2\\1&2&1&1&1\end{pmatrix}=\text{rg}\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&2&3&-1&2\\0&0&3&-1&2\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}=\text{rg}\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&0&0&0\\0&2&3&-1&2\\0&0&3&-1&2\end{pmatrix}=\text{rg}\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&0&0&0\\0&0&3&-1&2\\0&0&3&-1&2\end{pmatrix}=3$$

Donc la famille n'est pas génératrice non plus, sinon le rang aurait été 4.

4) $\text{rg}\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\1&2&2&-2&1\\1&2&0&-2&-1\\1&2&2&-2&1\\1&1&1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&1&-3&0\\0&1&-1&-3&-2\\0&1&1&-3&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\leq 4$ donc ce n'est pas une famille génératrice de $\mathbb{R}^5$.

Ce n'est donc pas une base non plus. Par ailleurs, si elle était libre, comme elle est composée de 5 vecteurs, elle formerait une base. On en déduit qu'elle n'est pas libre.

<u>Exercice 4</u> : Soit $(u_1,\dots u_p)\in\mathbb{R}^n$ une famille de vecteurs. Pour $k\in[\![1,p]\!]$, on pose $v_k=\sum_{i=1}^{k}u_i$.

Montrer que $(u_1,\dots u_p)$ est libre si et seulement si $(v_1,\dots,v_p)$ est libre

. . . .

Réponses : $\boxed{\Longrightarrow}$ On pose $\sum_{i=1}^{p}\lambda_i v_i=0$ et on veut montrer que tous les λ_i sont nuls. On a :

$\sum_{i=1}^{p}\lambda_i v_i=\text{‘}sum^{p}_{i=1}\lambda_i\sum_{j=1}^{i}u_j=\text{‘}\sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=j}^{p}\lambda_i\right)u_j$ Comme la famille des (u_j) est libre, on trouve :

$\forall j\in[\![1,n]\!],\ ,\sum_{i=j}^{p}\lambda_i=0$. Cela fait un système d'équation homogène écholonné de rang p : $\left\{\begin{array}{l}\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_p=0\\\lambda_2+\ldots+\lambda_p=0\\\vdots\\\lambda_p=0\end{array}\right.$

On trouve ainsi l'unique solution $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_p=0$ donc la famille des (v_i) est libre.

$\boxed{\Longleftarrow}$ On pose $\sum_{i=1}^{p}\lambda_i u_i=0$ et on veut montrer que tous les λ_i sont nuls. On a pour tout $i\in[\![2,n]\!]$, $u_i=v_i-v_{i-1}$ donc :

$\sum_{i=1}^{p}\lambda_i u_i=\lambda_1u_1+\sum_{i=2}^{p}\lambda_i(v_i-v_{i-1})=\lambda_1v_1+\sum_{i=2}^{p}\lambda_iv_i-\sum_{i=2}^{p}\lambda_iv_{i-1}=\sum_{i=1}^{p}\lambda_iv_i-\sum_{i=1}^{p-1}\lambda_{i+1}v_i$

$=\sum_{i=1}^{p-1}(\lambda_i-\lambda_{i+1})v_i+\lambda_pv_p$. Or la famille des (v_i) est indépendante, donc : $\forall i\in[\![1,p-1]\!],\lambda_i-\lambda_{i+1}=0$ et $\lambda_p=0$. Cela donne à nouveau un système d'équation homogène échelonné de rang p :

$\left\{\begin{array}{l}\lambda_1-\lambda_2=0\\\lambda_2-\lambda_3=0\\\vdots\\\lambda_{p-1}-\lambda_p=0\\\lambda_p=0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{l}\lambda_2=\lambda_1\\\lambda_3=\lambda_2\\\vdots\\\lambda_p=\lambda_{p-1}\\\lambda_p=0\end{array}\right.$ On trouve donc l'unique solution : $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_p=0$ donc la famille des (u_i) est libre.

<u>Exercice 5</u> : Compléter les famille libres suivantes en base de $\mathbb{K}^n$:

1) $\mathbb{K}^n=\mathbb{R}^3$ et $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ **2)** $\mathbb{K}^n=\mathbb{R}^4$ et $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ **3)** $\mathbb{K}^n=\mathbb{C}^4$ et $\begin{pmatrix}i\\1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\i\end{pmatrix}$

. . . .

Réponses : A chaque fois on peut rajouter des vecteurs de la base canonique qui vont bien. C'est à dire les vecteurs qui correspondent aux coordonnées non différenciées.

1) $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ est une base, en effet : $\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=3$

2) $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ est une base, en effet : $\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&-1&0\\0&1&1&0\\0&1&1&1\end{pmatrix}=\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&-1&0\\0&0&2&0\\0&0&2&1\end{pmatrix}=4$

3) $\begin{pmatrix}i\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\i\end{pmatrix}$ donne : $\operatorname{rg}\begin{pmatrix}i&0&0&1\\1&1&0&1\\1&0&1&1\\1&0&0&i\end{pmatrix}=\operatorname{rg}\begin{pmatrix}-1&0&0&i\\1&1&0&1\\1&0&1&1\\1&0&0&i\end{pmatrix}=\operatorname{rg}\begin{pmatrix}-1&0&0&i\\0&1&0&1+i\\0&0&1&1+i\\0&0&0&2i\end{pmatrix}=4$

C'est donc une base de $\mathbb{C}^4$

Exercice 6 : Soit $a\in\mathbb{R}$. Pour quelles valeurs de a la famille formée par les vecteurs $\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\a\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\1\\a\end{pmatrix}$ est elle libre ?

....

Réponses : On a $\operatorname{rg}\begin{pmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{pmatrix}=\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&1&a\\a&1&1\\1&a&1\end{pmatrix}=\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&1&a\\0&1-a&1-a^2\\0&a-1&1-a\end{pmatrix}=\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&1&a\\0&1-a&1-a^2\\0&0&2-a-a^2\end{pmatrix}$

Or $2-a-a^2=(1-a)(a+2)$. On remarque que la matrice est de rang 3 si et seulement si $1-a\neq 0$ et $(1-a)(2+a)\neq 0$.

Donc $\boxed{\text{la famille est libre si et seulement si } a\notin\{-2,1\}}$

Exercice 7 : Soit $a\in\mathbb{R}$. Pour quelles valeurs de a la famille formée par les vecteurs $\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\0\\a\end{pmatrix}$ est elle une base de $\mathbb{R}^3$? Dans ce cas, exprimer la base canonique dans cette base.

....

Réponses : On a $\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&-2&0\\2&-1&2\\1&0&a\end{pmatrix}=\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&3&2\\0&2&a\end{pmatrix}=\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&6&4\\0&6&3a\end{pmatrix}=\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&6&4\\0&0&3a-4\end{pmatrix}$ On remarque que la matrice est de rang 3 si et seulement si $a\neq\dfrac{4}{3}$.

Donc $\boxed{\text{la famille est libre si et seulement si } a\neq\dfrac{4}{3}}$ Inversons la matrice par méthode miroir...

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&0&1&0&0\\2&-1&2&0&1&0\\1&0&a&0&0&1\end{array}\right)\iff\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&0&1&0&0\\0&3&2&-2&1&0\\0&2&a&-1&0&1\end{array}\right)\iff\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&0&1&0&0\\0&6&4&-4&2&0\\0&6&3a&-3&0&3\end{array}\right)$$

$$\iff\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&0&1&0&0\\0&6&4&-4&2&0\\0&0&3a-4&1&-2&3\end{array}\right)\iff\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&0&1&0&0\\0&6&4&-4&2&0\\0&0&1&\frac{1}{3a-4}&\frac{-2}{3a-4}&\frac{3}{3a-4}\end{array}\right)$$

$$\iff\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&0&1&0&0\\0&6&0&\frac{-12(a+1)}{3a-4}&\frac{6(5a-4)}{3a-4}&\frac{12}{3a-4}\\0&0&1&\frac{1}{3a-4}&\frac{-2}{3a-4}&\frac{3}{3a-4}\end{array}\right)\iff\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&0&1&0&0\\0&1&0&\frac{-2(a+1)}{3a-4}&\frac{5a-4}{3a-4}&\frac{2}{3a-4}\\0&0&1&\frac{1}{3a-4}&\frac{-2}{3a-4}&\frac{3}{3a-4}\end{array}\right)$$

$$\iff\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{-a-8}{3a-4}&\frac{10a-8}{3a-4}&\frac{4}{3a-4}\\0&1&0&\frac{-2(a+1)}{3a-4}&\frac{5a-4}{3a-4}&\frac{2}{3a-4}\\0&0&1&\frac{1}{3a-4}&\frac{-2}{3a-4}&\frac{3}{3a-4}\end{array}\right)$$

L'inverse a une tête un peu moche, mais on peut dire que dans la nouvelle base les coordonnées des vecteurs :

$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ a pour coordonnées : $\dfrac{1}{3a-4}(-a-8, 10a-8, 4)$

$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ a pour coordonnées : $\dfrac{1}{3a-4}(-2(a+1), 5a-4, 2)$

$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ a pour coordonnées : $\dfrac{1}{3a-4}(1, -2, 3)$

Exercice 8 : **1)** Montrer que $e_1 = (1,1,1)$, $e_2 = (1,1,0)$, $e_3 = (1,0,-1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2) On pose $B = (e_1, e_2, e_3)$ et B_c la base canonique. Calculer $\mathrm{Mat}_{B_c}(B)$ et $\mathrm{Mat}_B(B_c)$.
3) Donner les coordonnées de $(9,5,2)$ dans cette base.

. . . .

Réponses : **1)** $\mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&-1\end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&-1\\0&-1&-2\end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&-2\\0&0&-1\end{pmatrix} = 3$

Donc c'est bien une base de $\mathbb{R}^3$.

2) On a $\boxed{\mathrm{Mat}_{B_c}(B) = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}}$ et $\mathrm{Mat}_B(B_c) = \mathrm{Mat}_{B_c}(B)^{-1}$ donc on inverse la matrice.

Avec la méthode miroir (que je vous laisse faire), on trouve : $\boxed{\mathrm{Mat}_B(B_c) = \begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&2&-1\\1&-1&0\end{pmatrix}}$

3) On calcule $\mathrm{Mat}_B(B_c)\begin{pmatrix}9\\5\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\-1\\4\end{pmatrix}$. Ainsi $\boxed{(9,5,2) = 6e_1 - e_2 + 4e_3}$.

Espaces vectoriels

Exercice 9 : Donner une bases des espaces vectoriels suivants :
1) $\mathrm{Vect}((1,1,2),(1,1,3),(0,0,1))$ **2)** $\mathrm{Vect}((0,1,0,2),(1,0,3,1),(1,1,1,1),(0,1,0,1),(1,2,3,4))$
3) $\mathrm{Vect}(\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}i\\i\end{pmatrix})$ **4)** $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ **5)** $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\5\\10\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\i\\2i\end{pmatrix}\right)$

. . . .

Réponses : On note E l'espace vectoriel dont on souhaite trouver une base. **1)** La famille$(1,1,2),(1,1,3),(0,0,1)$ est génératrice, mais pas libre :
On a $(1,1,3)-(1,1,2) = (0,0,1)$ Donc la famille est liée. On peut donc supprimer un vecteur pour obtenir une base. On prend $\boxed{((1,1,2),(0,0,1))}$. C'est une base car la famille est toujours génératrice et elle est libre car les vecteurs ne sont pas colinéaires.

2) La famille $((0,1,0,2),(1,0,3,1),(1,1,1,1),(0,1,0,1),(1,2,3,4))$ est génératrice de E mais clairement pas libre. $\mathrm{rg}\begin{pmatrix}0&1&1&0&1\\1&1&1&1&2\\0&3&1&0&3\\2&1&1&1&4\end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&1&1&1&2\\0&1&1&0&1\\0&3&1&0&3\\2&1&1&1&4\end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&1&1&1&2\\0&1&1&0&1\\0&3&1&0&3\\0&-1&-1&-1&0\end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&1&1&1&2\\0&1&1&0&1\\0&0&-2&0&0\\0&0&0&-1&1\end{pmatrix} =$
4
Donc l'espace vectoriel est de dimension 4, comme c'est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, on en déduit $E = \mathrm{Vect}((0,1,0,2),(1,0,3,1),(1,1,1,1),(0,1,0,1),(1,2,3,4)) = \mathbb{R}^4$ et donc $\boxed{((1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1))}$ est une base de E (la base canonique de $\mathbb{R}^4$)

3) $\left(\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}i\\i\end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice mais pas libre car trois vecteurs pour dimension 2 maximum. On peut donc choisir $\left(\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix}\right)$ pour base de E car ce sont deux vecteurs non colinéaires.

On a $\dim E = 2$ donc $E = \mathbb{C}^2$. On en déduit que $\boxed{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } E.}$

4) On a $2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc la famille est liée. On peut donc supprimer un vecteur pour la rendre libre. On a $\boxed{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$ qui est clairement libre (vecteurs non colinéaires) et génératrice de E donc c'est une base de E.

5) Tous les vecteurs sont colinéaires donc $\boxed{\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)}$ est une base de E.

<u>Exercice 10</u> : Les ensembles E suivants sont-ils des sous espace vectoriels de $\mathbb{R}^n$? Si oui, trouver une base et leur dimension. (Pour le 8) on se demandera si E est un sev de $\mathbb{C}^4$)

$n = 3$ **1)** $E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases}\right\}$ **2)** $E = \{(1 + t, t, 1 - t) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}\}$

3) $E = \{(t + s, s - t, s) \in \mathbb{R}^3 \mid (s, t) \in \mathbb{R}^2\}$ **4)** $E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x + 2z = 1 \\ y + z = 1 \end{cases}\right\}$

5) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xyz = 0\}$ **6)** $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + (y - z)^2 = 0\}$

$n = 4$ **7)** $E = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x - 3y + 2z + t = 0 \\ 2x + 2y + 2z - t = 0 \end{cases}\right\}$ **8)** $E = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{C}^4 \mid \begin{cases} x + iy + t = 0 \\ ix + y - t = 0 \\ z + it = 0 \end{cases}\right\}$

. . . .

Réponses : **1)** $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \iff \iff \begin{cases} x = z \\ y = -2z \end{cases}$

Donc $E = \{(z, -2z, z), \mid z \in \mathbb{R}\}$ On en déduit $\boxed{E = \text{Vect}((1, -2, 1)) \text{ c'est un espace vectoriel de dimension } 1}$.

2) $E = \{(1 + t, t, 1 - t) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}\}$
N'est pas un espace vectoriel, en effet $(0, 0, 0)$ n'appartient pas à E :
On a $(1+t, t, 1-t) = (0, 0, 0) \iff 1+t = 0$ et $t = 0$ et $1-t = 0 \iff t = 0$ et $t = 1$ et $t = -1$ Impossible.

3) $E = \{(t + s, s - t, s) \mid (s, t) \in \mathbb{R}^2\} = \{s(1, 1, 1) + t(1, -1, 0) \mid (s, t) \in \mathbb{R}^2\} = \boxed{\text{Vect}((1, 1, 1), (1, -1, 0))}$.
Les vecteurs sont non colinéaires. Donc $\boxed{E \text{ est un espace vectoriel de dimension } 2}$

4) $\boxed{E \text{ n'est pas un espace vectoriel}}$, en effet, $(0, 0, 0) \notin E$ car $(0, 0, 0)$ ne vérifie pas les équations.

5) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xyz = 0\}$ $\boxed{\text{n'est pas un espace vectoriel}}$ en effet :
$(1, 1, 0) \in E$ et $(0, 1, 1) \in E$ mais $(1, 1, 0) + (0, 1, 1) = (1, 2, 1) \notin E$.

6) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + (y - z)^2 = 0\} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}\right\} = \{(0, -z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$

On trouve $\boxed{E = \text{Vect}((0, -1, 1))}$ Donc $\boxed{E \text{ est un espace vectoriel de dimension } 1}$.

7) $\begin{cases} x - 3y + 2z + t = 0 \\ 2x + 2y + 2z - t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 3y + 2z + t = 0 \\ -3x - y + 4z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} t = -10x - 10z \\ y = -3x + 4z \end{cases}$ Donc $E = \{(x, -3x + 4z, z, -10x-10z) \mid (x, z) \in \mathbb{R}^2\} = \boxed{\text{Vect}((1, -3, 0, -10), (0, 4, 1, -10)) \text{ est un espace vectoriel de dimension } 2.}$

8) $\begin{cases} x + iy + t = 0 \\ ix + y - t = 0 \\ z + it = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z + it = 0 \\ x + iy + t = 0 \\ ix + y - t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z + it = 0 \\ x + iy + t = 0 \\ (1 + i)x + (1 + i)y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = -(1 + i)y \\ t = (1 - i)y \\ x = -y \end{cases}$

Donc $E = \{(-y, y, -(1+i)y, (1-i)y) \mid y \in \mathbb{R}\} = \boxed{\text{Vect}((-1, 1, -1 - i, 1 - i)) \text{ donc } E \text{ est un espace vectoriel de dimension } 1.}$

<u>Exercice 11</u> : On pose $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z = 0 \text{ et } 2x + y + z - t = 0\}$ et $G = \text{Vect}((1, -2, 1, 1), (1, 2, -3, 1), (5, -3, -2, 5))$.
1) Justifier que F et G sont des sev de $\mathbb{R}^4$ et donner leur dimension.
2) Montrer que $G \subset F$. En déduire que $G = F$.

. . . .

Réponses : **1)** On a :$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y + z - t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -y - z \\ t = 2x + y + z = -y - z \end{cases}$

Donc $F = \{(-y - z, y, z, -y - z) \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2\} = \boxed{\text{Vect}((-1, 1, 0, -1), (-1, 0, 1, -1)) \text{ est de dimension } 2}$.

Pour G, on a $\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ -2 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$ donc $\boxed{\text{dim}G = 2}$

2) On a $G = \text{Vect}((1, -2, 1, 1), (1, 2, -3, 1))$. Il suffit de montrer que $(1, -2, 1, 1)$ et $(1, 2, -3, 1)$ sont des vecteurs de F car alors on a $G \subset F$ (G est le plus petit sev qui contient ces vecteurs).
On a bien $(1, -2, 1, 1)$ et $(1, 2, -3, 1)$ qui vérifient les équations qui définissent F donc $G \subset F$.
$(1 + (-2) + 1 = 1 + 2 + (-3) = 0$ et $2 \cdot 1 + (-2) + 1 - 1 = 2 \cdot 1 + 2 + (-3) - 1 = 0)$ Par ailleurs, $\text{dim}F = \text{dim}G$ donne $\boxed{F = G}$.

<u>Exercice 12</u> : On pose $v_1 = (1, 1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 2, 3, 4)$, $v_3 = (3, 1, 4, 2)$, $v_4 = (10, 4, 13, 7)$, $v_5 = (1, 7, 8, 14)$.
1) La famille de cinq vecteurs est-elle libre ? Quel est son rang ?
2) Extraire de cette famille une base B de $E = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$.
3) Compléter B pour obtenir une base de $\mathbb{R}^4$.

. . . .

Réponses : **1)** La famille n'est clairement pas libre, car ce sont 5 vecteur de $\mathbb{R}^4$: il y a au moins un vecteur de trop.

On a $\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 10 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 4 & 13 & 8 \\ 1 & 4 & 2 & 7 & 14 \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 10 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -6 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 3 & -1 & -3 & 13 \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 10 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 15 & -5 \\ 0 & 0 & -7 & -21 & -7 \end{pmatrix} = 3$

car les deux dernières lignes sont colinéaires. Donc la famille est de $\boxed{\text{rang } 3}$.

2) Il faut trouver 3 vecteurs qui forment une famille libre, donc par exemple $\boxed{(v_1, v_2, v_3) \text{ est une base de } E}$.
En effet, si on calcule le rang comme pour la question précédente, cela revient à enlever les deux dernières colonnes et on trouve bien un rang qui vaut 3.

3) On peut ajouter $e_4 = (0, 0, 0, 1)$ en effet en calculant le rang de (v_1, v_2, v_3, e_4) comme à la question 1), on trouve que le rang vaut 4. Donc $\boxed{(v_1, v_2, v_3, e_4) \text{ est une base de } \mathbb{R}^4}$

<u>Exercice 13</u> : Si E et F sont deux sev de $\mathbb{K}^n$, on définit $E + F = \{x + y \mid x \in E \text{ et } y \in F\}$
1) Montrer que $E + F$ est un sev de $\mathbb{K}^n$
2) Exemple concret : On pose $E = \text{Vect}((1, 1, 1), (1, 1, 0))$ et $F = \text{Vect}((1, 0, 0), (0, 0, 1))$, quel est l'espace vectoriel $E + F$? Donner une base de $E + F$.
Dans la suite E et F sont deux sev quelconques.
3) Si $E = \text{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$ et $F = \text{Vect}(f_1, \ldots, f_n)$, montrer que $E + F = \text{Vect}(e_1, \ldots, e_p, f_1, \ldots, f_n)$
4) On suppose que $E \cap F = \{0\}$, calculer $\dim(E + F)$ en fonction des dimensions de E et de F.
5) Calculer $\dim(E + F)$ dans le cas général. Comparer avec la question 2).
6) Montrer que $E + F$ est le plus petit espace vectoriel au sens de l'inclusion contenant $E \cup F$.
7) En utilisant la question précédente, interpréter le résultat de la question 5).

. . . .

Réponses : **1)** Déjà, on a $0 \in E$ et $0 \in F$ donc $0 + 0 = 0 \in E + F$ donc $E + F \neq \emptyset$. Ainsi $u, v \in E + F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $u = x + y$ et $v = x' + y'$ avec $x, x' \in E$ et $y, y' \in F$.
On a donc $u + \lambda v = (x + \lambda x') + (y + \lambda y') \in E + F$ car E et F sont des espaces vectoriels.
Donc $E + F$ est un espace vectoriel.

2) On a $E = \{(x+y, x+y, x) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ et $F = \{(z, 0, t) \mid z, t \in \mathbb{R}\}$.
On a donc $E+F = \{(x+y+z, x+y, x+t) \mid (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4\} = \text{Vect}((1,1,1), (1,1,0), (1,0,0), (0,0,1))$. En calculant le rang, on détermine rapidement que $\dim(E+F) = 3$ donc $\boxed{E+F = \mathbb{R}^3}$.
On peut donc prendre la base canonique de $\mathbb{R}^3$ pour faire une base de $E+F$.

3) On pose $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de E et $(f_1, \ldots, f_n)$ une base de F.
Alors $E+F = \text{Vect}(e_1, \ldots, e_p, f_1, \ldots, f_n)$ donc $(e_1, \ldots, e_p, f_1, \ldots, f_n)$ est une famille génératrice de $E+F$.
On va montrer que c'est une base : il reste à montrer que la famille est libre.
Si on a $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i + \sum_{i=1}^{n} \mu_i f_i = 0$ alors $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = -\sum_{i=1}^{n} \mu_i f_i \in E \cap F = \{0\}$ donc $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = 0 = \sum_{i=1}^{n} \mu_i f_i$ Comme ce sont des bases, on en déduit d'une part $\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0$ d'autre part $\mu_1 = \ldots = \mu_n = 0$.
En conclusion, $(e_1, \ldots, e_p, f_1, \ldots, f_n)$ est libre et $\dim(E+F) = p+n$
Donc $\boxed{\dim(E+F) = \dim E + \dim F}$.

4) On a $x \in E+F \iff \exists e \in E\ ,\ f \in F \mid x = e+f \iff \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_p, \mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{K} \mid x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$
$\iff x \in \text{Vect}(e_1, \ldots, e_p, f_1, \ldots, f_n)$. Donc $\boxed{E+F = \text{Vect}(e_1, \ldots, e_p, f_1, \ldots, f_n)}$.

5) On note $(a_1, \ldots, a_q)$ une base de $E \cap F$. Qu'on complète en base de E : $(a_1, \ldots, a_q, e_{q+1}, \ldots, e_p)$ et en base de F : $(a_1, \ldots, a_q, f_{q+1}, \ldots, f_n)$
On pose alors $G = \text{Vect}(f_{q+1}, \ldots, f_n)$. On a va montrer deux choses :
$\boxed{E \cap G = \emptyset}$: En effet si $x \in E \cap G$ alors $x \in G$ donne $x = \sum_{i=q+1}^{n} x'_i f_i$.

Par ailleurs, on a $x \in E \cap F$ car $G \subset F$ donc $x = \sum_{i=1}^{q} x_i e_i$

On en déduit $\sum_{i=1}^{q} x_i e_i = \sum_{i=q+1}^{n} x'_i f_i$. Or $(a_1, \ldots, a_q, f_{q+1}, \ldots, f_n)$ est une famille libre, donc $x_1 = \ldots = x_q = x'_{q+1} = \ldots = x'_n = 0$ donc $x = 0$. On a bien $E \cap G = \emptyset$.
$\boxed{E+F = F+G}$ En effet $E+F = \text{Vect}(a_1, \ldots, a_q, e_{q+1}, \ldots, e_p, a_1, \ldots, a_q, f_{q+1}, \ldots, f_n)$
$= \text{Vect}(a_1, \ldots, a_q, e_{q+1}, \ldots, e_p, f_{q+1}, \ldots, f_n) = E+G$ en retirant les doublons.
On en conclus assez rapidement : $\dim(E+F) = \dim(E+G) = \dim E + \dim G = p + (n-q) = p+n-q$
Donc $\boxed{\dim(E+F) = \dim E + \dim F - \dim E \cap F}$
6) Si $E \cup F \subset G$ avec G un sev de $\mathbb{K}^n$, on veut montrer que $E+F \subset G$. C'est facile : on a $E \subset G$ et $F \subset G$.
Donc $\forall x \in E+F$, $x = e+f$ avec $e \in E$ et $f \in F$ donc $e, f \in G$, donc $e+f \in G$. On a bien $x \in G$.
Donc $E \cup F \subset G$.

7) La formule ressemble à celle sur le cardinal de l'union $\text{Card}(E \cup F)$. Cependant elle est sur les dimension d'espaces vectoriels. Or comme $E \cup F$ n'est pas un espace vectoriel, on ne peut pas considérer sa dimension. A la place, on utilise donc l'espace vectoriel $E+F$ qui est le plus petit espace vectoriel qui contient $E \cup F$ (c'est l'espace vectoriel le plus "proche" de $E \cup F$.) On retrouve alors la même formule que sur les cardinaux, à savoir : $\boxed{\dim(E+F) = \dim E + \dim F - \dim E \cap F}$

<u>Exercice 14</u> : On se place dans E un sous espace-vectoriel de $\mathbb{K}^n$ de dimension 2.
Montrer qu'il existe F, G, et H des sous espace-vectoriel non nuls de E tels que :
$F+G = F+H = G+H = E$ et $F \cap G = G \cap H = F \cap H = \{0\}$
....

Réponses : On a $E = \text{Vect}(e_1, e_2)$ avec (e_1, e_2) un base de E.
En analysant la situations, on a peut de possibilités en terme d'espaces vectoriels. Déjà en terme de dimension, si $\dim F = 0$ alors $F = \{0\}$ et les propriété de l'exercice ne peuvent pas être vérifiées car $F+G = G = E$ et $F+H = H = E$ donne $H \cap G = E \neq \emptyset$.
De même Si $\dim F = 2$ alors $F = E$ et les propriété au dessus ne peuvent pas être vérifiées car $G \cap F =$

$G \cap E = G = \{0\}$ et de même $H \cap F = H = \{0\}$ donne $G \cap H = \{0\}$.
Donc $\dim F = 1$. De la même manière, par symétrie on a $\dim G = \dim H = 1$.
Ils sont donc tous de dimension 1. On peut donc déjà poser $\boxed{F = \text{Vect} e_1}$ et $\boxed{G = \text{Vect}(e_2)}$. On a alors bien $F + G = E$ et $F \cap G = \{0\}$ (le seul vecteur colinéaire à e_1 et e_2 est x).
Reste à définir H, on doit trouver un autre vecteur non colinéaire à e_1 ou e_2. Par exemple $\boxed{H = \text{Vect}(e_1 + e_2)}$.
On a alors bien le résultat car $F + H = \text{Vect}(e_1, e_1 + e_2) = \text{Vect}(e_1, e_2) = E$ et $G + H = \text{Vect}(e_2, e_1 + e_2) = \text{Vect}(e_2, e_1) = E$. Par ailleurs, $e_1 + e_2$ n'est ni colinéaire à e_1, ni à e_2 donc $F \cap H = \{0\}$ et $G \cap H = \{0\}$.

Exercice 15 : Si E et F sont deux sev de $\mathbb{K}^n$,
Montrer que $E \cup F$ est un sev de $\mathbb{K}^n$ si et seulement si $E \subset F$ ou $F \subset E$.

Réponses : $\boxed{\Longleftarrow}$ C'est facile : si $E \subset F$ par exemple, alors $E \cup F = F$ est un sev de $\mathbb{K}^n$. Si $F \subset E$ alors $E \cup F = E$ est un sev de $\mathbb{K}^n$.
$\boxed{\Longrightarrow}$ C'est plus compliqué. On veut montrer que $F \subset E$ ou $E \subset F$. Supposons qu'on a $E \not\subset F$ et montrons qu'alors on a forcément $F \subset E$. Soit $f \in F$, on veut montrer que $f \in E$.
On sait qu'il existe $x \in E \backslash F$. On a alors $f \in E \cup F$ et $x \in E \cup F$, donc $f + x \in E \cup F$ car $E \cup F$ est un sev. Donc $x + f \in E$ ou $x + f \in F$.
Si $x + f \in F$, alors $x = (x + f) - f \in F$ car F est un sev. C'est contradictoire car on a posé $x \notin F$.
Donc la seule possibilité est que $x + f \in E$. On en déduit que $f = (x + f) - x \in E$ car E est un sev de $\mathbb{K}^n$.
On a bien montré que $f \in E$ et donc que $\boxed{F \subset E}$.
