# Programme de Colle - Semaine 27

1BCPST 2 | 27 mai 2024 | Année 2023- 2024

---

En terme de questions de cours, on pourra proposer aux étudiants une preuve ★ parmi celles proposées.

## Espaces vectoriels $\mathbb{K}^n$

On a $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, les espaces vectoriels plus généraux sont hors programme.

### Sous espaces vectoriels et Familles de vecteurs

- Régles de calculs sur les espaces vectoriels $\mathbb{K}^n$
- Définition des combinaisons linéaires
- Définition des sous-espaces vectoriels (sev) de $\mathbb{K}^n$.
- Intersection de sev.
- Sous espaces vectoriel engendré par $(x_1, \dots, x_p)$. notation $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_p)$
- $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_p)$ est le plus petit sev qui contient les vecteurs $x_1, \dots, x_p$
- Familles de vecteurs, famille libre, génératrice
- Base d'un espace vectoriel, base canonique de $\mathbb{K}^n$.
- $B$ est une base de $E$ si et seulement si chaque vecteur de $E$ admet une unique décomposition dans cette base (★ ★ sens direct et sens indirect).
- Lien avec les matrices : matrice d'une famille de vecteurs dans la base $B$ : $\mathrm{Mat}_B(x_1, \dots, x_p)$.
- Matrice de passage d'une base à une autre : $\mathrm{Mat}_B(B')$
- Formule du changement de base : si $x \in E$, alors $\mathrm{Mat}_{B'}(x) = \mathrm{Mat}_{B'}(B)\mathrm{Mat}_B(x)$ ★.
- $\mathrm{Mat}_B(B')$ est inversible d'inverse $\mathrm{Mat}_{B'}(B)$.

### Dimension

- Si $E$ est un sev de $\mathbb{K}^n$ différent de $\{0\}$ alors il existe une base de $E$.
- Toutes les bases de $E$ ont le même nombre de vecteurs.
- Toute famille libre de $E$ a moins de $\dim E$ vecteurs. Si elle a exactement $\dim E$ vecteurs c'est une base, sinon on peut la compléter en une base de $E$.
- Toute famille génératrice de $E$ a plus que $\dim E$ vecteurs. Si elle a exactement $\dim E$ vecteurs c'est une base, sinon on peut en extraire en une base de $E$.
- Rang d'une famille de vecteur noté $\mathrm{rg}(x_1, \dots, x_p) = \mathrm{rg}\mathrm{Mat}_B(x_1, \dots x_p)$
- $\dim \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_p) = \mathrm{rg}(x_1, \dots, x_p)$.
- $(x_1, \dots, x_p)$ est libre si et seulement si $\mathrm{rg}(x_1, \dots, x_p) = p$.

## Variables aléatoires sur un univers fini

### Variables aléatoires

- Variables aléatoires, définition. Notation $X(\Omega)$ pour l'univers image.
- Évènements élémentaires : $(X = x)$ avec $x \in X(\Omega)$.
- Évènements $(X \in I)$, $(X \geq k)$ etc...
- $((X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet.
- Opérations sur les variables aléatoires : $X + Y$, $XY$, $f(X)$ avec $f$ une fonction.
- Loi d'une variable aléatoire : $X(\Omega)$ et $\forall x \in X(\Omega)$ , $\mathbb{P}(X = x)$.
- $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) = 1$.
- Si $X$ et $Y$ ont la même loi alors $\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(Y \in I)$.
- Fonction de répartitions $F_X$, propriétés.
- Indépendance des variables aléatoire, indépendance mutuelle.

### Espérance, Variance

- Définition de l'espérance de $X$. définition variables centrées.
- Positivité, linéarité de l'espérance.

---

## Programme du DS (1er Juin)

Durée : 2 heures

---

**Partie Maths :**
- Chapitre 16 : Dérivées
- Chapitre 17 : Probabilités
- Chapitre 18 : Espaces Vectoriels
- Chapitre 19 : Variables aléatoires (parties I et II)

**Partie Info :**
- TP12 : Tri de listes

Pas de meme cette semaine :'(