

TD 18 - Variables aléatoires

1BCPST 2

Feuille d'exercice

Année 2022- 2023

Lois classiques

Exercice 1 : (En 1 minute) Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(q)$ des variables aléatoires indépendantes. Donner la loi, l'espérance et la variance des variables suivantes :

- 1) X^2 2) XY 3) $X + Y$ 4) $X - Y$ 5) X^2Y^3 6) $\min(X, Y)$ 7) $\max(X, Y)$

Réponses : 1) $X^2 \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ 2) $XY \hookrightarrow \mathcal{B}(pq)$
3) $(X + Y)(\Omega) = [0, 2]$ et $\mathbb{P}(X + Y = 0) = (1 - p)(1 - q)$; $\mathbb{P}(X + Y = 1) = p + q - 2pq$; $\mathbb{P}(X + Y = 2) = pq$
4) $(X - Y)(\Omega) = [-1, 1]$ et $\mathbb{P}(X - Y = -1) = (1 - p)q$; $\mathbb{P}(X - Y = 0) = 1 + 2pq - p - q$; $\mathbb{P}(X - Y = 1) = p(1 - q)$
5) $X^2Y^3 \hookrightarrow \mathcal{B}(pq)$ 6) $\min(X, Y) \hookrightarrow \mathcal{B}(pq)$ 7) $\max(X, Y) \hookrightarrow \mathcal{B}(1 - (1 - p)(1 - q))$

Exercice 2 : Soit $Y_1, Y_2, \dots, Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes Calculer la loi, l'espérance et la variance de X dans ces différents cas :

- 1) $X = \sum_{i=1}^n Y_i$ 2) $X = \prod_{i=1}^n Y_i$ 3) $X = \max_{1 \leq i \leq n} Y_i$ 4) $X = \min_{1 \leq i \leq n} Y_i$

Réponses : 1) $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ d'après le cours.

- 2) $X = \prod_{i=1}^n Y_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p^n)$ (on peut faire une récurrence sur le résultat de l'ex 1 .2))
3) $X = \max_{1 \leq i \leq n} Y_i \hookrightarrow \mathcal{B}(1 - (1 - p)^n)$ (on peut faire une récurrence sur le résultat de l'ex 1 .7))
4) $X = \min_{1 \leq i \leq n} Y_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p^n)$ (on peut faire une récurrence sur le résultat de l'ex 1 .6))

Exercice 3 : Soit $X, Y \hookrightarrow \mathcal{U}(n)$ indépendantes, donner la loi, l'espérance et la variance des lois suivantes :

- 1) $X + Y$ 2) $\max(X, Y)$ 3) $\min(X, Y)$.

Réponses : 1) On pose $Z = X + Y$. On a $Z(\Omega) = [2, 2n]$. Par ailleurs, si $k \in [2, n]$, On a $(Z = k) =$

$\bigcup_{i=1}^{k-1} (X = i) \cap (Y = k - i)$. C'est une union disjointe, on trouve donc :

$$\mathbb{P}(Z = k) = \sum_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}((X = i) \cap (Y = k - i)) = \sum_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}(X = i) \mathbb{P}(Y = k - i) \text{ par indépendance.}$$

$$\text{Donc } \mathbb{P}(Z = k) = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{n^2} = \frac{k-1}{n^2} \text{ et si } k \in [n+1, 2n], \text{ on a } (Z = k) = \bigcup_{i=k-n}^n (X = i) \cap (Y = k - i)$$

$$\text{Car } X + Y = k \implies Y = k - X \in [1, n]. \text{ Or } 1 \leq k - i \leq n \iff k - n \leq i \leq k - 1.$$

$$\text{On obtient donc cette fois } \mathbb{P}(Z = k) = \sum_{i=k-n}^n \frac{1}{n^2} = \frac{2n - k + 1}{n^2}$$

$$\text{Pour résumer, on a } \forall k \in [2, 2n], \mathbb{P}(Z = k) = \frac{|k - n| + n - 1}{n^2}$$

On a par ailleurs $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = n + 1$ et de même $\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) = \frac{n^2 - 1}{6}$ par indépendance

- 2) On pose $Z = \max(X, Y)$, on a $Z(\Omega) = [1, n]$.

Par ailleurs, si $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $\mathbb{P}(Z \leq k) = \mathbb{P}((X \leq k) \cap (Y \leq k)) = \mathbb{P}(X \leq k)\mathbb{P}(Y \leq k) = \frac{k^2}{n^2}$

On en déduit $\mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(Z \leq k) - \mathbb{P}(Z \leq k-1) = \frac{k^2 - (k-1)^2}{n^2} = \frac{2k-1}{n^2}$

En conclusion $\boxed{\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbb{P}(Z = k) = \frac{2k-1}{n^2}}$

On a $\mathbb{E}(Z) = \sum_{k=1}^n k \frac{2k-1}{n^2} = \frac{2}{n^2} \sum_{k=1}^n k^2 - \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k = \frac{2n(2n+1)(n+1)}{6n^2} - \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{(n+1)(2n+1)}{3n^2} - \frac{n+1}{n}$
 $= \frac{n+1}{6n}(4n+2-3) = \frac{(n+1)(4n-1)}{6n}$. Finalement on trouve $\boxed{\mathbb{E}(Z) = \frac{(n+1)(4n-1)}{6n}}$

Pour la variance, il y a de plus gros calculs :

$$\mathbb{E}(Z^2) = \sum_{k=1}^n k^2 \frac{2k-1}{n^2} = \frac{2}{n^2} \sum_{k=1}^n k^3 - \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{2}{n^2} \frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

$$= \frac{n+1}{6n}(3(n+1)^2 - 2(2n+1)) = \frac{n+1}{6n}(3n^2 + 3n + 1)$$

et donc $\mathbb{V}(Z) = \mathbb{E}(Z^2) - \mathbb{E}(Z)^2 = \frac{n+1}{6n}(3n^2 + 3n + 1) - \frac{(n+1)^2(4n-1)^2}{36n^2} = \frac{n+1}{36n^2}(6n(3n^2 + 3n + 1) + (n+1)(4n-1)^2)$
 $= \frac{n+1}{36n^2}(2n^3 - 2n^2 + n - 1) = \frac{(n+1)(n-1)}{36n^2}(2n^2 + 1)$

En réécrivant encore, on trouve finalement : $\boxed{\mathbb{V}(Z) = \frac{(n^2-1)(2n^2+1)}{36n^2}}$

3) On pose $Z = \min(X, Y)$, on a $\boxed{Z(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket}$.

Par ailleurs, si $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $\mathbb{P}(Z \geq k) = \mathbb{P}((X \geq k) \cap (Y \geq k)) = \mathbb{P}(X \geq k)\mathbb{P}(Y \geq k) = \frac{(n-k+1)^2}{n^2}$

On en déduit $\mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(Z \geq k) - \mathbb{P}(Z \geq k+1) = \frac{(n-k+1)^2 - (n-k)^2}{n^2} = \frac{2(n-k)+1}{n^2}$

En conclusion $\boxed{\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbb{P}(Z = k) = \frac{2n-2k+1}{n^2}}$

Pour l'espérance, on peut raisonner à partir de la question précédente, en utilisant :

$$X + Y = \max(X, Y) + \min(X, Y)$$

Ainsi $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X + Y - \max(X, Y)) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(\max(X, Y)) = n + 1 - \frac{(n+1)(4n-1)}{6n} =$
 $\frac{(n+1)(6n - (4n-1))}{6n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n}$ Finalement $\boxed{\mathbb{E}(Z) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n}}$

Malheureusement, on ne peut pas utiliser cette astuce pour la variance car le min et le max ne sont pas indépendants.

Mais il y a une autre astuce (qui tue). On peut remarquer que $\min(n+1-X, n+1-Y) = n+1 - \max(X, Y)$. En effet si X est le max de X, Y alors $n+1-X$ est le min de $n+1-X, n+1-Y$. OR $n+1-X \hookrightarrow \mathcal{U}(n)$ et pareil pour $n+1-Y \hookrightarrow \mathcal{U}(n)$. On peut donc se ramener au cas précédent.

On a donc $\mathbb{V}(Z) = \mathbb{V}((n+1) - \min(n+1-X, n+1-Y)) = \mathbb{V}(\min(n+1-X, n+1-Y)) = \frac{(n^2-1)(2n^2+1)}{36n^2}$
d'après la question précédente car $n+1-X$ et $n+1-Y$ suivent la loi uniforme et sont indépendants.

Finalement $\boxed{\mathbb{V}(Z) = \frac{(n^2-1)(2n^2+1)}{36n^2}}$.

Exercice 4 : Calculer la loi, l'espérance et la variance d'une variable X qui est égale au résultat maximum du lancer de trois dés.

.....

Réponses : On fait le cas général pour un dé à n faces. On aura juste à remplacer n par 6. On note

$U = \max(X, Y, Z)$ On a $\boxed{U(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket}$

et $\forall k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket, \mathbb{P}(U \leq k) = \mathbb{P}((X \leq k) \cap (Y \leq k) \cap (Z \leq k)) = \mathbb{P}(X \leq k)\mathbb{P}(Y \leq k)\mathbb{P}(Z \leq k) = \frac{k^3}{n^3}$.

On a $\mathbb{P}(U = k) = \mathbb{P}(U \leq k) - \mathbb{P}(U \leq k-1) = \frac{k^3 - (k-1)^3}{n^3}$

On a $\mathbb{E}(U) = \sum_{k=1}^n k \frac{k^3 - (k-1)^3}{n^3} = \frac{1}{n^3} \left(\sum_{k=1}^n k^4 - k(k-1)^3 \right) = \frac{1}{n^3} \left(\sum_{k=1}^n k^4 - k(k-1)^3 \right) = \frac{1}{n^3} \left(\sum_{k=1}^n k^4 - (k-1)^4 - (k-1)^3 \right)$
 $= \frac{1}{n^3} \left(\sum_{k=1}^n k^4 - (k-1)^4 - (k-1)^3 \right) = \frac{1}{n^3} \left(n^4 - 1 - \frac{n^2(n-1)^2}{4} \right)$

On trouve $\mathbb{E}(Z) = n - \frac{1}{n^3} - \frac{(n-1)^2}{4n}$ Pour $n = 6$ cela donne : $\mathbb{E}(Z) \simeq 4,9537..$

Concernant la variance, pas trop le choix... On doit calculer les probabilités pour $n = 6$:

k	1	2	3	4	5	6
$P(Z = k)$	$\frac{1}{6^3}$	$\frac{7}{6^3}$	$\frac{19}{6^3}$	$\frac{37}{6^3}$	$\frac{61}{6^3}$	$\frac{91}{6^3}$

On a donc : $\mathbb{E}(Z^2) = \frac{1}{6^3} + 4 \frac{7}{6^3} + 9 \frac{19}{6^3} + 16 \frac{37}{6^3} + 25 \frac{61}{6^3} + 36 \frac{91}{6^3} = \frac{5593}{6^3}$

Donc finalement, $\mathbb{V}(Z) = \mathbb{E}(Z^2) - \mathbb{E}(Z)^2 \simeq 1.35434...$

Exercice 5 : Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, donner la loi et l'espérance des variables suivantes :

1) $Y = X^2$ 2) $Y = 2^X$ 3) $Y = \frac{1}{1+X}$ 4) $Y = |X - 1|$

.....

Réponses : 1) On a $Y(\Omega) = \{k^2 \mid k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$ et si $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ alors $\mathbb{P}(Y = k^2) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Par ailleurs, $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X^2) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{E}(X)^2 = np(1-p) + (np)^2$. Donc $\mathbb{E}(Y) = np(1 + (n-1)p)$

2) On a $Y(\Omega) = \{2^k \mid k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$ et si $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ alors $\mathbb{P}(Y = 2^k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Par ailleurs, d'après la formule de transfert :

$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^n 2^k \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (2p)^k (1-p)^{n-k} = (2p + 1 - p)^n$ Donc d'après

le binôme de Newton on trouve : $\mathbb{E}(Y) = (p+1)^n$

3) On a $Y(\Omega) = \left\{ \frac{1}{1+k} \mid k \in \llbracket 0, n \rrbracket \right\}$ et si $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ alors $\mathbb{P}\left(Y = \frac{1}{1+k}\right) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

On rappelle que $(k+1) \binom{n+1}{k+1} = (n+1) \binom{n}{k}$ Donc $\frac{1}{1+k} \binom{n}{k} = \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k+1}$

Par ailleurs, d'après la formule de transfert :

$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{1+k} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{1+k} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k+1} p^k (1-p)^{n-k}$
 $= \frac{1}{p(n+1)} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} p^{k+1} (1-p)^{(n+1)-(k+1)} = \frac{1}{p(n+1)} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} p^k (1-p)^{(n+1)-k} = \frac{(p + (1-p))^{n+1} - (1-p)^{n+1}}{p(n+1)}$

Donc d'après le binôme de Newton on trouve : $\mathbb{E}(Y) = \frac{1 - (1-p)^{n+1}}{p(n+1)}$

4) On a $Y(\Omega) = \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. On a $\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 0) = (1-p)^n + \frac{n(n+1)}{2} p^2 (1-p)^{n-2}$ et

$\forall k \neq 1, \mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(X = k-1) = \binom{n}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k+1}$

Pour calculer $\mathbb{E}(Y)$, c'est plus simple si on s'aide de l'espérance de $\mathbb{E}(X)$ et de la somme des $\mathbb{P}(X = k)$ qui

vaut 1, On a : $\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^n |k-1| \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X = 0) + \sum_{k=1}^n (k-1) \mathbb{P}(X = k)$

$$= (1-p)^n + \sum_{k=1}^n k\mathbb{P}(X=k) - \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X=k) = (1-p)^n + \mathbb{E}(X) - (1 - \mathbb{P}(X=0)) = (1-p)^n + np - 1 + (1-p)^n$$

On trouve donc $\boxed{\mathbb{E}(X) = np + 2(1-p)^n - 1}$

Exercice 6 : Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ indépendant de $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n, q)$. Montrer que $X+Y$ est binomiale si et seulement si $p = q$

Réponses : Dans le sens indirect, on l'a vu en cours, on a clairement que si $p = q$ alors $X+Y \hookrightarrow \mathcal{B}(2n, p)$
 Dans le sens indirect, Supposons, $X+Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m, r)$ On a $X+Y(\Omega) = \llbracket 0, 2n \rrbracket = \llbracket 0, m \rrbracket$ qui donne directement $m = 2n$.

on a $\mathbb{E}(X+Y) = n(p+q) = 2nr$. On a aussi, $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) = np(1-p) + nq(1-q)$ par indépendance. Donc : $\frac{\mathbb{V}(X+Y)}{\mathbb{E}(X+Y)} = \frac{2nr(1-r)}{2nr} = 1-r = \frac{p(1-p) + q(1-q)}{p+q}$.

$$\text{Donc } r = 1 - \frac{p(1-p) + q(1-q)}{p+q} = \frac{q^2 + p^2}{p+q} \text{ et } 2n = \frac{n(p+q)}{r} = \frac{n(p+q)^2}{p^2 + q^2} \iff 2 = \frac{p^2 + q^2 + 2pq}{p^2 + q^2} = 1 + \frac{2pq}{p^2 + q^2}.$$

$$\iff \frac{2pq}{p^2 + q^2} = 1 \iff 2pq = p^2 + q^2 \iff (p-q)^2 = 0 \iff p = q$$

La seule possibilité est donc d'avoir $p = q$.

Lois à déterminer

Exercice 7 : n urnes sont numérotées de 1 à n . Dans la $k^{ième}$ urne se trouvent k -boules numérotées de 1 à k . On choisit uniformément au hasard une urne, puis uniformément au hasard une boule dans cette urne. On note U la variable représentant l'urne choisie et X la variable représentant le numéro de la boule tirée.

1) Donner la loi de U 2) Donner la loi et l'espérance de X .

3) Calculer un équivalent de l'espérance de X quand $n \rightarrow +\infty$.

Indication : On pourra utiliser que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln n$.

Réponses : 1) $\boxed{U \hookrightarrow \mathcal{U}(n)}$

2) On a $\boxed{X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket}$ et si $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\mathbb{P}_{(U=\ell)}(X=k) = \begin{cases} \frac{1}{\ell} & \text{si } k \leq \ell \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ Donc d'après les probabilités totales sur le système complet d'évènements $(U=\ell)_{\ell \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ on a :

$$\mathbb{P}(X=k) = \sum_{\ell=1}^n \mathbb{P}(U=\ell) \mathbb{P}_{(U=\ell)}(X=k) = \sum_{\ell=1}^k \frac{1}{n} \frac{1}{\ell} = \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^k \frac{1}{\ell}.$$

On ne peut pas simplifier plus on a donc $\boxed{\mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^k \frac{1}{\ell}}$.

$$\begin{aligned} \text{3) On a } \mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^n k\mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k \sum_{\ell=1}^k \frac{1}{\ell} = \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^n \frac{1}{\ell} \sum_{k=\ell}^n k = \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^n \frac{1}{\ell} \frac{n(n+1) - \ell(\ell-1)}{2} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^n \frac{n(n+1)}{2\ell} - \frac{(\ell-1)}{2} = \frac{n+1}{2} \sum_{\ell=1}^n \frac{1}{\ell} - \frac{n(n-1)}{2n} = \frac{n+1}{2} \sum_{\ell=1}^n \frac{1}{\ell} - \frac{n-1}{2} \sim \frac{n+1}{2} \sum_{\ell=1}^n \frac{1}{\ell} \sim \frac{n \ln n}{2} \\ \text{car } \frac{n-1}{2} &= o\left(\frac{n+1}{2} \sum_{\ell=1}^n \frac{1}{\ell}\right) \text{ et } \sum_{\ell=1}^n \frac{1}{\ell} \sim \ln n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty. \text{ Finalement } \boxed{\mathbb{E}(X) \sim \frac{n \ln n}{2}} \end{aligned}$$

Exercice 8 : Dans le jeu Fort-Boyard, on dispose n urnes dont $n-2$ contiennent de la farine et deux contiennent des cafards géants. Les n candidats doivent plonger la main dans les urnes pour récupérer une clé au fond. Les candidats passent tous à tour de rôle, ils ne peuvent pas choisir l'urne d'un précédent candidat.

1) On note X la variable représentant quel candidat sera celui à plonger sa main dans les cafards en premier.

Donner la loi de X .

2) Calculer l'espérance et la variance de X .

Réponses : 1) $X(\Omega) = \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Car il y aura forcément un candidat avant le candidat n qui mettra sa main dans les cafards.

Il y a pleins de méthodes, en voilà trois.

1ere méthode : La plus simple, mais pas la plus intuitive est de changer complètement de point de vue et de se placer du côté des urnes de cafards. Pour ces urnes : l'expérience se résume à tirer aléatoirement deux candidats parmi les candidats entre 1 et n .

Ainsi on considère qu'un résultat de l'expérience est de tirer deux candidats parmi n pour les cafards. On a donc $\text{Card}(\Omega) = \binom{n}{2}$. Par la suite, l'évènement $X = k$ correspond à l'évènement où le candidat minimal tiré par les urnes est le k ieme candidat. C'est à dire qu'on tire le k ieme candidat, ainsi qu'un candidat supérieur : parmi les candidats $k+1, \dots, n$. Donc on a $n - (k+1) + 1 = n - k$ tirages dont le minimum est k .

$$\text{Ainsi } \mathbb{P}(X = k) = \frac{n-k}{\binom{n}{2}} = \frac{2(n-k)}{n(n-1)}$$

On peut vérifier que c'est bon en faisant la somme de ces probas.

2eme méthode : On note C_ℓ : "Le ℓ^{ieme} candidat trouve des cafards". On a alors $(X \leq k) = \bigcup_{i=1}^k C_i$.

On remarque que $\mathbb{P}(C_i) = \frac{2}{n}$: chaque candidat a 2 chances sur n de trouver une urne avec des cafards, par

$$\text{ailleurs si } i \neq j \text{ alors } \mathbb{P}(C_i \cap C_j) = \frac{2}{n(n-1)}$$

Par ailleurs, si $i \neq j \neq k$, on a $\mathbb{P}(C_i \cap C_j \cap C_k) = 0$ pareil pour les intersections plus grandes.

On a $P(X \leq k) = \bigcup_{i=1}^k C_i$. On a donc, d'après la formule du crible :

$$\mathbb{P}(X \leq k) = \sum_{i=1}^k \mathbb{P}(C_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq k} \mathbb{P}(C_i \cap C_j) + 0 = \frac{2k}{n} - \frac{2k(k-1)}{2n(n-1)} = \frac{k(2n-k-1)}{n(n-1)}$$

$$\text{On a donc : } \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \leq k) - \mathbb{P}(X \leq k-1) = \frac{k(2n-k-1)}{n(n-1)} - \frac{(k-1)(2n-k)}{n(n-1)} = \frac{2(n-k)}{n(n-1)}.$$

$$\text{Finalement } \mathbb{P}(X = k) = \frac{2(n-k)}{n(n-1)}.$$

3e méthode : $(X \geq k) = \bigcap_{i=1}^k \overline{C_i}$. Donc on a :

$$\mathbb{P}(X \geq k) = \mathbb{P}(\overline{C_1})\mathbb{P}_{\overline{C_1}}(\overline{C_2})\mathbb{P}_{\overline{C_1} \cap \overline{C_2}}(\overline{C_3}) \dots \mathbb{P}_{\overline{C_1} \cap \dots \cap \overline{C_{k-1}}}(\overline{C_k}) = \mathbb{P}(C_1) \prod_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}_{\bigcap_{j=1}^{i-1} \overline{C_j}}(\overline{C_i})$$

$$\mathbb{P}(X > k) = \frac{n-2}{n} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{n-2-i}{n-i} = \frac{(n-2)!(n-k)!}{(n-2-k)!n!} = \frac{(n-k)(n-k-1)}{n(n-1)}$$

$$\text{Finalement } \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X > k-1) - \mathbb{P}(X > k) = \frac{(n-k+1)(n-k)}{n(n-1)} - \frac{(n-k)(n-k-1)}{n(n-1)} =$$

$$\frac{(n-k)(n-k+1-(n-k-1))}{n(n-1)} = \frac{2(n-k)}{n(n-1)} \text{ Finalement } \mathbb{P}(X = k) = \frac{2(n-k)}{n(n-1)}.$$

$$\begin{aligned} \text{2) On a } \mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{n-1} k \mathbb{P}(X = k) = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} k(n-k) = \frac{2}{n(n-1)} \left(n \sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \right) \\ &= \frac{2}{n(n-1)} \left(\frac{n^2(n-1)}{2} - \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \right) = n - \frac{2n-1}{3} = \frac{n+1}{3} \text{ Donc } \mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{3} \end{aligned}$$

On fait la formule de transfert pour calculer $\mathbb{E}(X^2)$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \mathbb{P}(X=k) = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} k^2(n-k) = \frac{2}{n(n-1)} \left(n \sum_{k=1}^{n-1} k^2 - \sum_{k=1}^{n-1} k^3 \right) \\ &= \frac{2}{n(n-1)} \left(\frac{n^2(n-1)(2n-1)}{6} - \frac{n^2(n-1)^2}{4} \right) = \frac{n(2n-1)}{3} - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{6} \text{ Donc :} \\ \mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{n(n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{9} = \frac{n-2}{18} \text{ On trouve } \boxed{\mathbb{V}(X) = \frac{n-2}{18}}.\end{aligned}$$

Cela semble logique : s'il n'y a que 2 candidats et 2 urnes, alors la variance est nulle, parce que le 1er candidat tombera toujours sur les cafards.

Exercice 9 : Une urne contient 6 balles numérotées. On en tire trois simultanément et on note X le minimum des nombre obtenus. Donner la loi, l'espérance et la variance de X .

Réponses : On a $X(\Omega) = \llbracket 1, 4 \rrbracket$. On a ici Ω représente les combinaisons de 3 parmi 6 balles, donc $\text{Card}\Omega = \binom{6}{3} = 20$

Comme il y a peu de possibilités, on peut toutes les décrire : un seul tirage nous donne que le minimum vaut 4 donc $\mathbb{P}(X=4) = \frac{1}{20}$

Si le minimum vaut 3 alors on a tiré la boule trois, puis 2 boules parmi les trois qui valent 4,5,6 donc $\mathbb{P}(X=3) = \frac{\binom{3}{2}}{20} = \frac{3}{20}$

Si le minimum vaut 2 alors on a tiré la boule deux, puis 2 boules parmi les quatre qui valent 3,4,5,6 $\mathbb{P}(X=2) = \frac{\binom{4}{2}}{20} = \frac{6}{20}$

Si le minimum vaut 1 alors on a tiré la boule un, puis 2 boules parmi le reste $\mathbb{P}(X=1) = \frac{\binom{5}{2}}{20} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$

On a $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2} + \frac{12}{20} + \frac{9}{20} + \frac{4}{20} = \frac{35}{20} = \frac{7}{4}$ donc $\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{7}{4} = 1.75}$

On a $\mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{2} + \frac{24}{20} + \frac{36}{20} + \frac{16}{20} = \frac{86}{20} = \frac{43}{10}$ Donc $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{86}{20} - \frac{49}{16} = \frac{99}{80}$.

On trouve $\boxed{\mathbb{V}(X) = \frac{99}{80} = 1.2375}$

Exercice 10 : Dans un jeu avec n joueurs, les joueurs se passent un nombre de proche en proche. Chaque candidat reçoit un nombre de son prédécesseur et l'envoie au candidat suivant en respectant les règles suivantes (on suppose $p \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$) :

★ Il communique le même nombre avec probabilité $2p$

★ Il augmente le nombre de 1 avec probabilité $\frac{1}{2} - p$

★ Il diminue le nombre de 1 avec probabilité $\frac{1}{2} - p$

On note X_i la variable représentant l'ajout du i^{ieme} candidat.

1) Donner la loi, l'espérance et la variance de X_i

On suppose que le nombre de départ est $a \in \mathbb{N}$. On note Y_k la variable aléatoire représentant le nombre communiqué au k^{ieme} joueur.

2) Donner $Y_k(\Omega)$, $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(Y)$ 3) Donner la loi de Y_k . 4) Calculer $\mathbb{P}(Y_n = a)$.

5) Quelle est la limite de cette probabilité quand $n \rightarrow +\infty$?

Réponses : 1) $\boxed{X_i(\Omega) = \llbracket -1, 1 \rrbracket \text{ et } \mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = \frac{1}{2} - p \text{ et } \mathbb{P}(X_i = 0) = 2p}$.

Par ailleurs, $\mathbb{E}(X_i) = -\mathbb{P}(X_i = -1) + \mathbb{P}(X_i = 1) = 0$ donc $\boxed{\mathbb{E}(X_i) = 0 : X_i \text{ est centrée}}$

et comme $X_i^2 \hookrightarrow \mathcal{B}(1-2p)$, on a $\mathbb{E}(X^2) = 1-2p$ et $\boxed{\mathbb{V}(X_i) = 1-2p}$. 2) $Y_k(\Omega) = \llbracket a-k, a+k \rrbracket$. On a

$$Y_k = a + \sum_{i=1}^k X_i \text{ donc } \mathbb{E}(Y_k) = a + \sum_{i=1}^k \mathbb{E}(X_i) = a. \text{ Ainsi } \boxed{\mathbb{E}(Y_k) = a}.$$

Enfin, $\mathbb{V}(Y_k) = \mathbb{V}(\sum_{i=1}^k X_i) = \sum_{i=1}^k \mathbb{V}(X_i) = \boxed{n(1-2p)}$. Par indépendance mutuelle des X_i .

3) Soit $\ell \in \llbracket -k, k \rrbracket$ alors, $Y_k = a + \ell$ est vrai à condition qu'on ait un nombre $j \in \llbracket \ell, k \rrbracket$ de X_i qui valent 1 et ensuite, $j - \ell$ qui valent -1 et les $k - (2j - \ell)$ restant valent 0.

Attention, cela donne une contrainte supplémentaire, en effet : $k - (2j - \ell) \geq 0 \iff k \geq 2j - \ell \iff k + \ell \geq 2j$.

Ainsi on en choisit j parmi k , puis $j - \ell$ parmi $k - \ell$, on a donc :

$$\mathbb{P}(Y = a + \ell) = \sum_{j=\ell}^{\frac{k+\ell}{2}} \binom{k}{j} \binom{k-\ell}{j-\ell} \left(\frac{1}{2} - p\right)^\ell \left(\frac{1}{2} - p\right)^{j-\ell} (2p)^{k-2j+\ell}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(Y = a + \ell) = \sum_{j=\ell}^{\frac{k+\ell}{2}} \binom{k}{j} \binom{k-\ell}{j-\ell} \left(\frac{1}{2} - p\right)^j (2p)^{k-2j+\ell} = \mathbb{P}(Y = a - \ell)}$$

4) On a $\boxed{P(Y_n = a) = \sum_{j=0}^{n/2} \binom{n}{j}^2 \left(\frac{1}{2} - p\right)^j (2p)^{n-2j}}$ pour $\ell = 0$

5) Trop difficile.

Exercice 11 : Une urne contient $2N$ balles, dont N rouges. On tire exactement N balles sans remise. X est la variable aléatoire représentant le nombre de balles rouges tirées.

1) Donner la loi de X . **2)** Calculer l'espérance et la variance de X .

.....

Réponses : **1)** $\boxed{X(\Omega) = \llbracket 0, N \rrbracket}$ et si $k \in X(\Omega)$ alors l'évènement $(X = k)$ correspond à l'évènement où k boules rouges sont tirées (parmi N) et donc $N-k$ sont tirées parmi les N restantes, on a donc $\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{N}{k} \binom{N}{N-k}}{\binom{2N}{N}}$

Pour simplifier : $\boxed{\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{N}{k}^2}{\binom{2N}{N}}}$

2) Astuce : On peut définir pour chaque boule rouge la variable B_i qui vaut 1 si la boule est tirée et 0 sinon, ainsi $B_i \hookrightarrow \mathcal{B}(\frac{1}{2})$.

On a alors $X = \sum_{i=1}^n B_i$ et $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(B_i) = N\mathbb{E}(B_1) = \frac{N}{2}$. Par linéarité de l'espérance. Donc $\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{N}{2}}$.

Sinon on peut le faire aussi en brute force :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^N k \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^N k \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{\binom{2N}{N}} \sum_{k=0}^N k \binom{N}{k}^2 = \frac{1}{\binom{2N}{N}} \sum_{k=0}^N N \binom{N-1}{k-1} \binom{N}{k} = \frac{N}{\binom{2N}{N}} \sum_{k=0}^N \binom{N-1}{N-k} \binom{N}{k} = \frac{N}{\binom{2N}{N}} \binom{2N-1}{N} \text{ d'après la formule de Van der Monde.}$$

On a par ailleurs : $\frac{\binom{2N-1}{N}}{\binom{2N}{N}} = \frac{N}{2N} = \frac{1}{2}$ Donc $\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{N}{2}}$

Pour la variance, je ne propose que la première méthode : $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$.

$$\begin{aligned} \text{Or } \mathbb{E}(X^2) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n B_i^2\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(B_i^2) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{E}(B_i B_j) = N\mathbb{E}(B_1^2) + N(N-1)\mathbb{E}(B_1 B_2) \\ &= \frac{N}{2} + N(N-1)\mathbb{P}(B_1 = 1 \cap B_2 = 1) = \frac{N}{2} + N(N-1) \frac{\binom{2N-2}{N-2}}{\binom{2N}{N}} \\ &= \frac{N}{2} + N(N-1) \frac{N(N-1)}{2N(2N-1)} = \frac{N}{2} + \frac{N(N-1)^2}{2(2N-1)} = \frac{N^3}{2(2N-1)} \end{aligned}$$

Donc $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{N^3}{2(2N-1)} - \frac{N^2}{4}$ donc $V(X) = \frac{N^2}{4(2N-1)}$

Exercice 12 : Aux jeu des quatre chevaux, on lance un dé pour avancer son cheval sur le plateau. Si le dé tombe sur 6, on peut le relancer et continuer à avancer son pion. Le six peut ainsi arriver plusieurs fois de suite au cours du même tour pour un joueur, et donc le joueur pourra avancer son pion plusieurs fois.

X est la variable représentant le nombre de cases qu'avance le pion d'un joueur sur un tour.

1) Supposons que les règles du jeu stipulent que le dé ne peut être relancé qu'une seule fois (au premier 6), quelle est la loi de X , et son espérance ?

2) Supposons que les règles du jeu stipulent que le dé ne peut être relancé que n fois pendant le tour d'un joueur. Quelle est alors la loi de X_n , et son espérance ?

3) Calculer l'espérance quand $n \rightarrow +\infty$. Interpréter le résultat.

Réponses : On note D_i la variable aléatoire qui représente le résultat du i^e lancer de dé.

1) On a $X(\Omega) = \llbracket 1, 12 \rrbracket \setminus \{6\}$. Si $k \in \llbracket 1, 5 \rrbracket$, alors $P(X = k) = P(D_1 = k) = \frac{1}{6}$ et si $k \geq 7$ alors $P(X = k) = P(D_1 = 6 \cap D_2 = k - 6) = P(D_1 = 6)P(D_2 = k - 6) = \frac{1}{36}$

On obtient donc :
$$P(X = k) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{si } k \in \llbracket 1, 5 \rrbracket \\ \frac{1}{36} & \text{si } k \in \llbracket 7, 12 \rrbracket \end{cases}$$

On a $E(X) = \frac{1+2+3+4+5}{6} + \frac{7+8+9+10+11+12}{36} = \frac{15}{6} + \frac{51}{36} = \frac{147}{36}$ donc $E(X) = \frac{49}{12} \simeq 4,08...$

2) On a cette fois $X_n(\Omega) = \llbracket 1, 6n \rrbracket \setminus \{6k \mid k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket\}$.

Si $k \in X(\Omega)$, on note $k = 6q + r$ la division euclidienne de k par 6, alors :

$$P(X_n = k) = P\left(\bigcap_{i=1}^q D_i = 6 \cap D_{q+1} = r\right) = \prod_{i=1}^q P(D_i = 6)P(D_{q+1} = r) = \frac{1}{6^q} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6^{q+1}}$$

Remarque : comme on peut écrire le quotient $q = \left\lfloor \frac{k}{6} \right\rfloor$ on peut généraliser ainsi :

$$\forall k \in X(\Omega), P(X = k) = \frac{1}{6^{\lfloor \frac{k}{6} \rfloor + 1}}.$$

Par ailleurs $E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} kP(X = k) = \sum_{q=0}^n \sum_{r=1}^5 (6q+r) \frac{1}{6^{q+1}} = \sum_{q=0}^n \frac{1}{6^{q+1}} \left(5 \cdot 6q + \sum_{r=1}^5 r \right) = \sum_{q=0}^n \frac{1}{6^q} + \frac{15}{6^{q+1}} = \sum_{q=0}^n \frac{1}{6^q} (5 \cdot 6q + \sum_{r=1}^5 r) = \sum_{q=0}^n \frac{21}{6^{q+1}} = \frac{7}{2} \sum_{q=0}^n \frac{1}{6^q} = \frac{7}{2} \frac{1 - (1/6)^{n+1}}{1 - (1/6)} = \frac{7}{2} \frac{6^{n+1} - 1}{5 \cdot 6^n}$ Donc $E(X_n) = \frac{7}{10} \frac{6^{n+1} - 1}{6^n}$

3) On a $E(X_n) \sim \frac{7}{10} \frac{6^{n+1}}{6^n} = \frac{42}{10} = 4,2$. Donc $E(X_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 4,2$. On en déduit qu'au jeu des quatre chevaux,

dans la règle générale (sans limitation du nombre de lancers de dé par tour), l'espérance du nombre de cases avancées pour un pion est de 4,2.

Exercice 13 : Dans un jeu de société, un joueur peut être enfermé en prison. Pour se libérer, le joueur doit lancer un dé équilibré à quatre faces.

Il est libéré dès lors qu'au bout de n lancers, le joueur a obtenu chaque face possible au moins une fois. S'il n'est pas libre au bout de 10 tour, alors il est libéré au 11e tour. On note X la variable qui représente le nombre de tour qu'il faut au joueur pour se libérer.

1) Donner la loi de X (on pourra utiliser la formule du crible de Poincaré)

2) Calculer l'espérance et la variance de X .

Réponses : On note D_i le résultat du i^e lancer de dé. Ainsi $D_i \hookrightarrow \mathcal{U}(4)$

1) Notons Y_i la variable représentant l'apparition du chiffre i pour la première fois. Dans le jeu, $X(\Omega) = \llbracket 4, 11 \rrbracket$

et pour la loi de X : On a $(X > k) = \bigcup_{i=1}^4 (Y_i > k)$ donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > k) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^4 (Y_i > k)\right) = \sum_{i=1}^4 \mathbb{P}(Y_i > k) - \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \mathbb{P}(Y_i > k \cap Y_j > k) \\ &+ \sum_{1 \leq i < j < \ell \leq 4} \mathbb{P}(Y_i > k \cap Y_j > k \cap Y_\ell > k) - \mathbb{P}(Y_1 > k \cap Y_2 > k \cap Y_3 > k \cap Y_4 > k) \\ &= 4\mathbb{P}(Y_1 > k) + 6\mathbb{P}(Y_1 > k \cap Y_2 > k) + 4\mathbb{P}(Y_1 > k \cap Y_2 > k \cap Y_3 > k) - \mathbb{P}(Y_1 > k \cap Y_2 > k \cap Y_3 > k \cap Y_4 > k) \end{aligned}$$

Car les Y_i suivent la même loi.

On a $\mathbb{P}(Y_1 > k) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^k D_i \neq 1\right) = \prod_{i=1}^k \mathbb{P}(D_i \neq 1) = \left(\frac{3}{4}\right)^k$. De même : $\mathbb{P}(Y_1 > k \cap Y_2 > k) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^k D_i \in \{3, 4\}\right) = \prod_{i=1}^k \mathbb{P}(D_i \in \{3, 4\}) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$ et de même $\mathbb{P}(Y_1 > k \cap Y_2 > k \cap Y_3 > k) = \left(\frac{1}{4}\right)^k$

Enfin, $\mathbb{P}(Y_1 > k \cap Y_2 > k \cap Y_3 > k \cap Y_4 > k) = 0$.

On trouve donc $\mathbb{P}(X > k) = \frac{4 \cdot 3^k - 6 \cdot 2^k + 4}{4^k} = \frac{3^k - 3 \cdot 2^{k-1} + 1}{4^{k-1}}$.

Par ailleurs, d'après les règles du jeu on a $\mathbb{P}(X > 11) = 0$.

On a donc $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X > k-1) - \mathbb{P}(X > k) = \frac{3^{k-1} - 3 \cdot 2^{k-2} + 1}{4^{k-2}} - \frac{3^k - 3 \cdot 2^{k-1} + 1}{4^{k-1}} = \frac{3^{k-1} - 3 \cdot 2^{k-1} + 3}{4^{k-1}}$
(valable pour $k \leq 10$)

Finalement : $\mathbb{P}(X = k) = \frac{3^{k-1} - 3 \cdot 2^{k-1} + 3}{4^{k-1}}$ et $\mathbb{P}(X = 11) = \mathbb{P}(X > 10) = \frac{3^{10} - 3 \cdot 2^9 + 1}{4^9}$

2) On a $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=4}^{11} k\mathbb{P}(X = k)$. On pourrait le calculer de manière théorique, mais ici comme X prend peu de valeurs on peut calculer leur proba respectives (j'ai calculé ça avec python) :

k	4	5	6	7	8	9	10	11
$P(X = k)$	$\frac{3}{32}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{75}{512}$	$\frac{135}{1024}$	$\frac{903}{8192}$	$\frac{1449}{16384}$	$\frac{9075}{131072}$	$\frac{13995}{262144}$

Ainsi on trouve $\mathbb{E}(X) \simeq 5,83729\dots$

Et on trouve $\mathbb{E}(X^2) \simeq 44,350811\dots$ et $\mathbb{V}(X) \simeq 10,2767\dots$

Soit $\sigma(X) \simeq 3,2057\dots$

Exercice 14 : Une urne contient N boules numérotées 1 à N . On tire $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$ boules sans remise. On note X et Y le plus petit et le plus grand numéro obtenus

1) Pour $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$, calculer $\mathbb{P}(X \geq k)$, en déduire la loi de X .

2) Pour $\ell \in \llbracket 1, N \rrbracket$, calculer $\mathbb{P}(X \leq \ell)$, en déduire la loi de Y .

.....
Réponses : 1) On a $X(\Omega) = \llbracket 1, N \rrbracket$. L'évènement $(X \geq k)$ correspond à avoir tiré les n balles parmi les $N - k + 1$ plus grands nombres. On a $\mathbb{P}(X \geq k) = \frac{\binom{N-k+1}{n}}{\binom{N}{n}}$. On en déduit :

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \geq k) - \mathbb{P}(X \geq k+1) = \frac{\binom{N-k+1}{n} - \binom{N-k}{n}}{\binom{N}{n}} \text{ Donc finalement } \mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{N-k}{n-1}}{\binom{N}{n}}.$$

2) On a $Y(\Omega) = \llbracket 1, N \rrbracket$. L'évènement $(Y \leq \ell)$ correspond à avoir tiré les n balles parmi les ℓ plus petits nombres. On a $\mathbb{P}(Y \leq \ell) = \frac{\binom{\ell}{n}}{\binom{N}{n}}$. On en déduit :

$$\mathbb{P}(Y = \ell) = \mathbb{P}(Y \leq \ell) - \mathbb{P}(Y \leq \ell-1) = \frac{\binom{\ell}{n} - \binom{\ell-1}{n}}{\binom{N}{n}} \text{ Donc finalement } \mathbb{P}(Y = \ell) = \frac{\binom{\ell-1}{n-1}}{\binom{N}{n}}.$$

Exercice 15 : Dans un jeu, on dispose d'une pièce et d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n . On lance une pièce de monnaie n fois. Au bout de n lancers, on compte le nombre de "Pile" et on tire dans

l'urne à boules autant de boules que le nombre de "pile" obtenus. On fait le maximum des nombres tirés sur les boules. 1) Donner la loi du maximum X .

2) Pour jouer à ce jeu, il faut payer 0.75€ par lancer de pièce et on gagne la somme d'argent représentée par le nombre X . Pour quels nombre de lancers de pièce est-il rentable de jouer à ce jeu ?

Réponses : 1) Déjà la loi du nombre de piles est représentée par $P \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$.

On a donc $\mathbb{P}(P = k) = \frac{1}{2^n} \binom{n}{k}$. Par ailleurs on peut déterminer la loi de X sachant que $P = k$. On s'inspire

de l'exercice 14 : $\mathbb{P}_{(P=k)}(X = j) = \frac{\binom{n-j}{k} - \binom{n-j-1}{k}}{\binom{n}{k}}$. et $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(P = 0) = \frac{1}{2^n}$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \mathbb{P}(X = j) &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(P = k) \mathbb{P}_{P=k}(X = j) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^n} \binom{n}{k} \frac{\binom{j}{k} - \binom{j-1}{k}}{\binom{n}{k}} \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^n \left(\binom{j}{k} - \binom{j-1}{k} \right) = \frac{1}{2^n} (2^j - 1 - 2^{j-1} + 1) = 2^{j-n} - 2^{j-n-1}. \end{aligned}$$

Ainsi $\sum_{j=0}^n \mathbb{P}(X = j) = \mathbb{P}(X = 0) + \sum_{j=1}^n 2^{j-n} - 2^{j-n-1} = \frac{1}{2^n} - 2^{-n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2} = 1$. Donc ça correspond bien à une loi de probabilité.

Ainsi : $\mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{2^n}$ et $\mathbb{P}(X = j) = 2^{j-n} - 2^{j-n-1}$.

2) Cela revient à créer une variable : Le gain pour une partie vaut $Y = X - \frac{3n}{4}$. On va calculer l'espérance de gain en calculant $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X) - \frac{3n}{4}$.

$$\begin{aligned} \text{On a } \mathbb{E}(X) &= \sum_{j=0}^n j \mathbb{P}(X = j) = \sum_{j=1}^n j (2^{j-n} - 2^{j-n-1}) = 2^{-n} \left(\sum_{j=1}^n j 2^j - \sum_{j=1}^n j 2^{j-1} \right) \\ &= 2^{-n} \left(\sum_{j=1}^n j 2^j - \sum_{j=1}^n (j-1) 2^{j-1} - \sum_{j=1}^n 2^{j-1} \right) = 2^{-n} \left(\sum_{j=1}^n j 2^j - \sum_{j=0}^{n-1} j 2^j - \frac{2^n - 1}{2 - 1} \right) = 2^{-n} (n 2^n - 0 - 2^n + 1) \\ &= n - 1 + 2^{-n} \end{aligned}$$

Finalement $\mathbb{E}(X) = n - 1 + 2^{-n}$. Ainsi, $\mathbb{E}(Y) = \frac{n}{4} - 1 + 2^{-n}$. Donc le jeu est rentable à partir de $n = 4$ lancers environs.

Exercice 16 : Une urne contient N boules numérotées 1 à N . Pour tout $n \geq 1$, on note X_n le nombre de numéros non encore sortis à l'issue du n^{ieme} tirage.

1) Quelle est la loi de X_1 ? 2) Pour $n \geq 1$, déterminer $X_n(\Omega)$.

3) En utilisant la formule des probabilités totales, démontrer que pour $n \geq 2$ et $k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$:

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \frac{N-k}{N} \mathbb{P}(X_{n-1} = k) + \frac{k+1}{N} \mathbb{P}(X_{n-1} = k+1)$$

4) En déduire que $(\mathbb{E}(X_n))_{n \geq 1}$ est géométrique et donner son expression en fonction de n .

Réponses : 1) X_1 suit loi constante on a $X_1 = N - 1$.

2) $X_n(\Omega) = \llbracket 0, N-1 \rrbracket$

3) D'après les proba totales sur les événements $(X_{n-1} = i)$, on a : $\mathbb{P}(X_n = k) = \sum_{i=1}^{N-1} \mathbb{P}(X_{n-1} = i) \mathbb{P}(X_n = k | X_{n-1} = i)$

k). Or $\mathbb{P}(X_{n-1} = i | X_n = k) = 0$ pour $i \notin \{k, k+1\}$, donc :

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X_{n-1} = k) \mathbb{P}(X_n = k | X_{n-1} = k) + \mathbb{P}(X_{n-1} = k+1) \mathbb{P}(X_n = k | X_{n-1} = k+1) =$$

$$\frac{N-k}{N} \mathbb{P}(X_{n-1} = k) + \frac{k+1}{N} \mathbb{P}(X_{n-1} = k+1)$$

$$4) \text{ On a } \mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=0}^{N-1} k \mathbb{P}(X_n = k) = \sum_{k=0}^{N-1} k \frac{N-k}{N} \mathbb{P}(X_{n-1} = k) + \sum_{k=0}^{N-1} k \frac{k+1}{N} \mathbb{P}(X_{n-1} = k+1)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{N-1} k \frac{N-k}{N} \mathbb{P}(X_{n-1} = k) + \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} k(k+1) \mathbb{P}(X_{n-1} = k+1) \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} k \mathbb{P}(X_{n-1} = k) - \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} k^2 \mathbb{P}(X_{n-1} = k) + \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (k+1)^2 \mathbb{P}(X_{n-1} = k+1) - \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (k+1) \mathbb{P}(X_{n-1} = k+1) \\
&= \mathbb{E}(X_{n-1}) + \frac{1}{N} \mathbb{E}(X_{n-1}^2) - \frac{1}{N} \mathbb{E}(X_{n-1}^2) - \frac{1}{N} \mathbb{E}(X_{n-1}) = \left(1 - \frac{1}{N}\right) \mathbb{E}(X_{n-1}).
\end{aligned}$$

On en déduit $(\mathbb{E}(X_n))_n$ est géométrique de raison $\left(1 - \frac{1}{N}\right)$ et :

$$\mathbb{E}(X_n) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-1} \mathbb{E}(X_1) \text{ avec } X_1 = N-1, \text{ donc } \boxed{\mathbb{E}(X_n) = \frac{(N-1)^n}{N^{n-1}}}$$
