Programme de Colle - Semaine 28

1BCPST 2 — 3 Juin 2024 — Année 2023- 2024

En terme de questions de cours, on pourra proposer aux étudiants une preuve ★ parmi celles proposées.

Variables aléatoires sur un univers fini

Variables aléatoires

- Variables aléatoires, définition. Notation $X(\Omega)$ pour l'univers image.
- Évènements élémentaires : $(X = x)$ avec $x \in X(\Omega)$.
- Évènements $(X \in I)$, $(X \geq k)$ etc...
- $((X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet.
- Opérations sur les variables aléatoires : $X + Y$, XY, $f(X)$ avec f une fonction.
- Loi d'une variable aléatoire : $X(\Omega)$ et $\forall x \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}(X = x)$.
- $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) = 1$.
- Si X et Y ont la même loi alors $\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(Y \in I)$.
- Fonction de répartitions F_X, propriétés.
- Indépendance des variables aléatoire, indépendance mutuelle.

Espérance, Variance

- Définition de l'espérance de X. définition variables centrées.
- Positivité, linéarité de l'espérance.
- Formule de Transfert
- Si X et Y sont indépendants alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$
- Définition des moments de X, de la variance et de l'écart-type.
- Formule de König-Huygens : $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$ ★
- Si $a \in \mathbb{R}$, $\mathbb{V}(a + X) = \mathbb{V}(X)$ et $\mathbb{V}(aX) = a^2\mathbb{V}(X)$
- Si X et Y sont indépendants alors $\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$ ★

Lois usuelles

- Loi Certaine : $X = a$, $\mathbb{E}(a) = a$ et $\mathbb{V}(a) = 0$
- Loi Uniforme sur $[\![1, n]\!]$: $X \hookrightarrow \mathcal{U}(n)$, $\mathbb{E}(X) = \dfrac{n+1}{2}$ et $\mathbb{V}(X) = \dfrac{n^2-1}{12}$ ★
- Loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$, espérance variance.
- Loi de Bernoulli : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, $\mathbb{E}(X) = p$ et $\mathbb{V}(X) = p(1-p)$.
- Loi Binômiale : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, $\mathbb{E}(X) = np$ et $\mathbb{V}(X) = np(1-p)$.
- La loi d'une somme de n variables de Bernoulli est $\mathcal{B}(n, p)$.

Intégrales, le retour

On pourra poser aux élèves des rappels sur les intégrales, mais aussi des exercices plus théoriques et surtout des sommes de Riemann.

- Définition de l'intégrale d'une fonction continue ou prolongeable par continuité. Lien avec la notion d'aire
- Définition de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux
- Relation de Chasles (Admis)
- Valeur moyenne d'une fonction sur $[a, b]$, inégalité de la moyenne (Admis)
- Positivité de l'intégrale, égalité de la moyenne
- Sommes de Riemann pour les fonctions continues
- Linéarité, croissance de l'intégrale
- Si f est continue sur $[a, b]$ à valeur dans $\mathbb{R}_+$ alors $f = 0 \iff \int_a^b f = 0$
- Inégalité triangulaire $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$ ★

Informatique

- Les dictionnaires

Programme du DS (1er Juin)

Durée : 3 heures

Partie Maths :
- Chapitre 16 : Dérivées
- Chapitre 17 : Probabilités
- Chapitre 18 : Espaces Vectoriels
- Chapitre 19 : Variables aléatoires (parties I et II)

Partie Info :
- TP12 : Tri de listes

Le meme de la semaine :