TD 19 - Intégration / DL

1BCPST 2 — Feuille d'exercice — Année 2023- 2024

Intégration

Exercice 1 : *(Sommes de Riemann ★)* Calculer les limites des suites ci dessous quand $n \to +\infty$:

1) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$ **2)** $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2}$ **3)** $u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{k^2}$ **4)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\exp(2k+n)^{\frac{2}{n}}}{n}$

Exercice 2 : ★★ Calculer les limites des suites ci dessous quand $n \to +\infty$:

1) $u_n = \ln n - \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \ln k$ **2)** $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{3n} \frac{n^2}{(k+3n+1)^3}$ **3)** $u_n = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{(2n)!}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}$

Exercice 3 : ★ - ★★ Trouver un équivalent quand $n \to +\infty$ des suites suivantes :

1) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+2k)^3}$ **2)** $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$

Exercice 4 : ★★

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$, telle que $\displaystyle\int_0^1 f = \frac{1}{2}$. Montrer que $\exists c \in [0,1] \mid f(c) = c$.

Exercice 5 : ★ - ★★ Donner l'ensemble de dérivabilité de ces fonctions et calculer leur dérivées :

1) $x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \exp(-t^2)\ \mathrm{d}t$ **2)** $x \mapsto \displaystyle\int_x^{x+1} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t$ **3)** $x \mapsto \displaystyle\int_{-x}^{2x} \frac{1}{t^3+1}\ \mathrm{d}t$ **4)** $x \mapsto \displaystyle\int_1^2 x\ln(tx)\ \mathrm{d}t$

Exercice 6 : ★ - ★★ Soit $f(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x \arctan(t^2)\ \mathrm{d}t$

1) Donner le domaine de continuité de f et montrer qu'on peut la prolonger par continuité en 0.
2) Montrer que la fonction ainsi prolongée est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
3) Etudier les variations et la parité de f.
4) Montrer que f est bornée, quel est le comportement de f en $+\infty$ et $-\infty$?

Exercice 7 : ★ Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, telle que pour toute fonction g continue sur $[a,b]$, on a $\displaystyle\int_a^b fg = 0$. Montrer que $f = 0$.

Exercice 8 : ★★ - ★★★

Soit f une fonction continue positive sur $[a,b]$. On pose $M = \sup\limits_{[a,b]} f$ et $I_n = \left(\displaystyle\int_a^b f^n\right)^{\frac{1}{n}}$

1) Justifier l'existence de M et montrer que $M \geq 0$
2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \leq M(b-a)^{\frac{1}{n}}$
3) Soit $\varepsilon > 0$, **a)** Montrer qu'il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > N_1, I_n < M + \varepsilon$
. **3.b)** Montrer qu'il existe un intervalle (non réduit à un point) $J = [c,d] \subset I$ tel que $\forall t \in J$, $f(t) \geq M - \dfrac{\varepsilon}{2}$
4) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Développements limités

Exercice 1 : ♡ - ★ Calculer le DL à l'ordre 4 en 0 des fonctions suivantes : **1)** $x \mapsto \cos x - e^x$
2) $x \mapsto (1+x^2)\exp x$ **3)** $x \mapsto \sqrt{x^5+x^4}$ **4)** $x \mapsto xe^x - x^2\cos x$ **5)** $x \mapsto \sin(3x)$ $x \mapsto (\ln x)^2$
6) $x \mapsto \tan x$ **7)** $x \mapsto \ln(\cos x)$ **8)** $x \mapsto \ln(2+x)$ **9)** $x \mapsto \cos(3x+1)$ **10)** $x \mapsto \cos^{\pi}(x)$

Exercice 2 : Calculer les limites suivantes : **1)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x^2}$ **2)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{e^x - 1 - x}$
3) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) - x$ **4)** $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\tan x} - \dfrac{1}{x}$ **5)** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - \left(x^3 + \dfrac{x^2}{2}\right)\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

Exercice 3 : ♡ - ★ **1)** Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto (x+1)^x$ admet un DL à l'ordre n en 0.
2) Calculer son DL à l'ordre 3 en 0. **3)** En déduire $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x+1)^x - 1 - x^2}{x^3}$.

Exercice 4 : ★★ Soit f est de classe C^n sur I avec $0 \in I$ avec $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$
1) Montrer que la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f$ admet un DL à l'ordre $n+1$ en 0 et le calculer en fonction de celui de f.
2) En déduire le DL de arctan en 0 à l'ordre n.
3) Calculer le DL à l'ordre 10 en 0 de $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$

Exercice 5 : ★ Calculer le DL à l'ordre n de $f : x \mapsto \dfrac{x^4}{1-x^2}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en déduire la valeur de $f^{(n)}(0)$.

Exercice 6 : ★★ **1)** Soit P un polynôme de degré n, démontrer que $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} x^k$.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer qu'il existe un unique polynôme P de degré n tel que $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $P^{(k)}(0) = f^{(k)}(0)$.
3) Donner une condition nécessaire et suffisante sur $Q \in \mathbb{R}[X]$ pour avoir $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $Q^{(k)}(0) = f^{(k)}(0)$.

Exercice 7 : ★ Montrer que $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$ peut être prolongée en une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8 : ★ - ★★ On pose $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x$.
1) Montrer que f est bijective sur $[-1,+\infty[$. On note f^{-1} sa réciproque.
2) Montrer que f^{-1} est de classe C^{∞} sur son ensemble de définition.
3) Calculer le DL à l'ordre 4 de f^{-1} en 0.

Exercice 9 : ★★ Montrer que $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ est prolongeable en une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et calculer son DL à l'ordre 2 en 0.

Exercice 10 : ★★ Soit $a \in \mathbb{R}^*$. On pose $f(x) = \dfrac{\ln(1+ax)}{1+x}$. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles f présente un point d'inflexion.
Remarque : Un point d'inflexion est un point au voisinage duquel la courbe de f traverse sa tangente (la courbe de f n'est pas entièrement au dessus, ni entièrement en dessous)

Exercice 11 : ★ On pose $f(x) = xe^{-x}$. Montrer que la courbe de f présente un point d'inflexion dont on précisera les coordonnées. Tracer la courbe de f.
Remarque : Même remarque que pour l'ex 10