TD 19 - Intégration / DL

1BCPST 2 — Feuille d'exercice — Année 2022- 2023

Intégration

Exercice 1 : *(Sommes de Riemann)* Calculer les limites des suites ci dessous quand $n \to +\infty$:

1) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$ **2)** $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2}$ **3)** $u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{k^2}$ **4)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \exp(2k+n)^{\frac{2}{n}}$

....

Réponses : **1)** $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2\left(1+\frac{k}{n}\right)^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \Big[\arctan x\Big]_0^1$
$= \arctan(1) = \dfrac{\pi}{4}$, donc $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{4}}$.

2) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2\left(1+\frac{k}{n}\right)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{k}{n}}{1+\frac{k}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \Big[\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\Big]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2$

Donc $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\ln 2}{2}}$.

3) $u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{k^2} = \sum_{k'=1}^{n} \frac{n}{(k'+n)^2} = \frac{k=1}{n} \frac{n}{n^2\left(\frac{k}{n}+1\right)^2} = \frac{1}{n}\frac{k=1}{n} \frac{1}{\left(\frac{k}{n}+1\right)^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)^2}$

Or $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t = \Big[\frac{-1}{t+1}\Big]_0^1 = -\frac{1}{2}+1 = \frac{1}{2}$ Donc $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}}$.

4) $u_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \exp(2k+n)^{\frac{2}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \exp\left(4\frac{k}{n}+1\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \exp 4x+1\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{1}{4}e^{4x+1)}\Big]_0^1 = \frac{e^5-e}{4}$

Finalement $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{e^5-e}{4}}$

Exercice 2 : Calculer les limites des suites ci dessous quand $n \to +\infty$:

1) $u_n = \ln n - \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n} \ln(k)$ **2)** $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{3n} \frac{n^2}{(k+3n+1)^3}$ **3)** $u_n = \displaystyle\frac{1}{n}\left(\frac{(2n)!}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}$

....

1) $u_n = \ln n - \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n} \ln(k) = \frac{1}{n}(n\ln n - \sum_{k'=0}^{n} \ln(k'+n)) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\ln n - \ln(k+n)) = -\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(\frac{k}{n}+1\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}$
$\displaystyle\int_0^1 \ln(t+1)\,\mathrm{d}t$

$\displaystyle\int_0^1 \ln(t+1)\,\mathrm{d}t = \int_1^2 \ln t\,\mathrm{d}t = \Big[t\ln t + t\Big]_1^2 = 2\ln 2 - 1$

Donc $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2\ln 2 - 1}$.

2) $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{3n} \frac{n^2}{(k+3n+1)^3} = \sum_{k=0}^{3n} \frac{n^2}{(3n+1)^3\left(\frac{k}{3n+1}+1\right)^3} = \frac{n^2}{(3n+1)^2}\cdot\frac{1}{3n+1}\sum_{k=0}^{3n} \frac{1}{\left(\frac{k}{3n+1}+1\right)^3}$

Or $\displaystyle\frac{n^2}{(3n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et $\displaystyle\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\left(\frac{k}{N}+1\right)^3} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^3}\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{-1}{2(1+x)^2}\Big]_0^1 = \frac{-1}{4}+\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Finalement par produit et avec le changement de variable $N = 3n+1$, on trouve : $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}}$.

3) On a $\ln(u_n) = \ln\dfrac{1}{n} + \ln\left(\dfrac{(2n)!}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} = -\ln n + \dfrac{1}{n}(\ln((2n)!) - \ln(n!)) = -\ln n + \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \ln k$ On retrouve la question 3. On trouve donc : $\ln u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2\ln 2 - 1$. Or $e^{2\ln 2-1} = \dfrac{4}{e}$ donc $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{4}{e}}$.

Exercice 3 : Trouver un équivalent quand $n \to +\infty$ des suites suivantes :

1) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+2k)^3}$ **2)** $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$

....

1) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n-2k)^3} = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(1+2\frac{k}{n}\right)^3} = \frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(1+2\frac{k}{n}\right)^3}$

Or $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(1+2\frac{k}{n}\right)^3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{1}{(1+2x)^3}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{-1}{4(1+2x)^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{4\cdot 9} + \frac{1}{4} = \frac{2}{9}$. Donc $\boxed{u_n \sim \dfrac{2}{9n^2}}$

2) $\ln u_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x.$

Or par IPP : $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x = \Big[\,x\ln(1+x^2)\,\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \ln 2 - \left(\int_0^1 \frac{2(x^2+1)-2}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$

$= \displaystyle\ln 2 - 2 + 2\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \ln 2 - 2 + 2\Big[\,\arctan x\,\Big]_0^1 = \ln 2 - 2 + 2\frac{\pi}{4} = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$

Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{\ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}}$ donc on a $\boxed{u_n \sim 2e^{\frac{\pi}{2}-2}}$

Exercice 4 : Soit f une fonction continue sur $[0,1]$, telle que $\displaystyle\int_0^1 f = \frac{1}{2}$. Montrer que $\exists c \in [0,1] \mid f(c) = c$.

....

On peut penser au TVI, et cela va surement fonctionner, mais en l'occurence, le théorème de Rolle fonctionne très bien. Il faut alors construire une fonction g telle que quand on la dérive, on trouve $g'(x) = f(x) - x$ afin de montrer que la dérivée s'annule

On pose $g(x) = \displaystyle\int_0^x f - \frac{x^2}{2}$. On a $g(0) = g(1) = 0$. Par ailleurs, g est de classe C^1 sur $[0,1]$ car $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f$ est une primitive de f. On a donc g continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$. D'après le théorème de Rolle : $\exists c \in]0,1[\mid g'(c) = c$

On en déduit $g'(c) = f(c) - c = 0$. Donc $\boxed{f(c) = c}$.

Exercice 5 : Dire sur quel ensemble les fonctions suivantes sont dérivables, calculer leur dérivées et en déduire les variations de f (sauf pour la question 2) :

1) $x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \exp(-t^2)\,\mathrm{d}t$ **2)** $x \mapsto \displaystyle\int_x^{x+1} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ **3)** $x \mapsto \displaystyle\int_{-x}^{2x} \frac{1}{t^3+1}\,\mathrm{d}t$ **4)** $x \mapsto \displaystyle\int_1^2 x\ln(tx)\,\mathrm{d}t$

....

Réponses : **1)** $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \exp(-t^2)\,\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \to e^{-t^2}$ est continue sur $[0,x]$ (ou $[x,0]$ si $x < 0$). On a par ailleurs, $F'(x) = e^{-x^2}$.

On a $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \exp(-t^2)\,\mathrm{d}t = F(2x) - F(x)$. Donc $\boxed{f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})}$.

Par ailleurs, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{f'(x) = 2F'(2x) - F'(x) = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2}.}$

$$f'(x) > 0 \iff 2e^{-4x^2} > e^{-x^2} \iff \ln 2 - 4x^2 > -x^2 \iff \frac{\ln 2}{3} > x^2 \iff -\sqrt{\frac{\ln 2}{3}} < x < \sqrt{\frac{\ln 2}{3}}$$

On remarque que f est impaire car $f(-x) = \displaystyle\int_0^{-x} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^x e^{-(-u)^2}(-\,\mathrm{d}u) = *\int_0^x e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = -f(x)$.

Cela simplifie le travail et on a juste à tracer le tableau de variation de f entre 0 et $+\infty$.

x	0		$\sqrt{\dfrac{\ln 2}{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	

2) $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \to \dfrac{\sin t}{t}$ est continue sur $]0, x]$ et prolongeable par continuité en 0. On a donc $\boxed{f \in C^1(\mathbb{R})}$. car $f(x) = F(x+1) - F(x)$ est la somme et la composition de fonctions de classe C^1.

Ainsi, on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{f'(x) = F'(x+1) - F'(x) = \dfrac{\sin(x+1)}{x+1} - \dfrac{\sin x}{x}}$.

3) $t \mapsto \dfrac{1}{t^3+1}$ est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$. $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{1}{t^3+1}\ \mathrm{d}t$ est définie et dérivable sur $]-1, +\infty[$.

Par ailleurs, $G : x \mapsto \displaystyle\int_{-2}^x \frac{1}{t^3+1}\ \mathrm{d}t$ est définie et dérivable sur $]-\infty, -1[$

On a $-x \in]-\infty, -1[\iff x > 1$ et $2x \in]-\infty, -1[\iff x < \dfrac{-1}{2}$. Donc on distingue les cas :

<u>1er Cas : $x \in]-\infty, \dfrac{-1}{2}[$</u> alors $f(x) = \displaystyle\int_{-x}^{2x} \frac{1}{t^3+1}\ \mathrm{d}t$ n'est pas définie car $-1 \in [2x, -x]$. et $t \mapsto \dfrac{1}{t^3+1}$ n'est pas continue en -1, ni prolongeable par continuité.

<u>2e Cas : $x \in]\dfrac{-1}{2}, 1[$</u> alors $f(x) = F(2x) - F(-x)$ donc f est de classe C^1 sur $]\dfrac{-1}{2}, 1[$ par somme de fonctions de classe C^1.

<u>3e Cas : $x \in]1, +\infty[$</u> alors $f(x) = \displaystyle\int_{-x}^{2x} \frac{1}{t^3+1}\ \mathrm{d}t$ n'est pas définie car $-1 \in [-x, 2x]$ comme au premier cas.

Conclusion : $\boxed{f \in C^1\left(\left]\dfrac{-1}{2}, 1\right[\right)}$.

Par ailleurs, on a $\forall x \in \left]\dfrac{-1}{2}, 1\right[$, $f'(x) = 2F'(2x) - F'(-x) = \boxed{\dfrac{2}{1+8x^3} - \dfrac{1}{1-x^3}}$

Ainsi $f'(x) = \dfrac{2 - 2x^3 - 1 - 8x^3}{(1+8x^3)(1-x^3)} = \dfrac{1 - 10x^3}{(1+8x^3)(1-x^3)}$

Donc $f'(x) > 0 \iff 1 - 10x^3 > 0 \iff \dfrac{1}{\sqrt[3]{10}} > x$.

x	$\dfrac{-1}{2}$		$\dfrac{1}{\sqrt[3]{10}}$		1
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	||
$f(x)$	||	$\nearrow$		$\searrow$	||

4) On a $f(x) = \displaystyle\int_1^2 x\ln(tx)\ \mathrm{d}t = x\int_1^2 \ln(tx)\ \mathrm{d}t$.

On remarque que $t \mapsto \ln(tx)$ n'est définie sur $[1, 2]$, qu'à condition que $x > 0$. Donc f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par ailleurs, $\forall x > 0$, $f(x) = x\displaystyle\int_x^{2x} \ln(u)\frac{\mathrm{d}u}{x} = \int_x^{2x} \ln(u)\ \mathrm{d}u = \Big[\ u\ln u - u\ \Big]_x^{2x} = 2x\ln(2x) - 2x - x\ln x + x =$ $(\ln x - 1 - \ln 2)x$

Donc comme somme et produit de fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, on trouve que $\boxed{f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}$

On a $f'(x) = 2\ln(2x) - \ln x = \boxed{2\ln 2 + \ln x}$ ainsi $f'(x) > 0 \iff \ln x > -2\ln 2 \iff \ln x > \ln \dfrac{1}{4} \iff x > \dfrac{1}{4}$.
D'où le tableau de variations :

x	0		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\Vert$ 0	$\searrow$	$\frac{-3\ln 2 - 1}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

<u>Exercice 6</u> : Soit $f(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x \arctan(t^2)\ \mathrm{d}t$

1) Donner le domaine de continuité de f et montrer qu'on peut la prolonger par continuité en 0.
2) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ 0 \leq \arctan(x^2) \leq x^2$.
3) Montrer que la fonction ainsi prolongée est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
4) Etudier les variations et la parité de f.
5) Montrer que f est bornée, quel est le comportement de f en $+\infty$ et $-\infty$?

. . . .

1) $F : x \to \displaystyle\int_0^x \arctan(t^2)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ car $t \to \arctan(t^2)$ est continue sur $\mathbb{R}$. On a donc $\boxed{f \text{ continue sur } \mathbb{R}^*}$ par produit de fonction continue sur R^*. Par ailleurs $f(x) = \dfrac{F(x)}{x} = \dfrac{F(x) - F(0)}{x - 0}$ représente le taux d'accroissement en 0 de la fonction F.
Donc comme F est dérivable en 0, on a : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = F'(0) = \arctan(0^2) = 0$.

Donc $\boxed{f \text{ est prolongeable par continuité en 0 en posant } f(0) = 0.}$

2) D'après l'inégalité des accroissements finis sur $[0, x^2]$, on a $0 \leq \arctan(x^2) \leq x^2$.
3) f est C^1 sur $\mathbb{R}^*$ comme produit de fonctions e classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.
On a $\forall x \neq 0\ ,\ f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}F(x) - \dfrac{1}{x}F'(x) = \dfrac{1}{x}f(x) + \dfrac{\arctan(x^2)}{x}$.
Donc $0 < \displaystyle\int_0^x \arctan(t^2)\ \mathrm{d}t < \int_0^x t^2\ \mathrm{d}t < \frac{x^3}{3}$
Cela donne $0 < \dfrac{1}{x}f(x) < \dfrac{x^3}{3} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = f'(0) = 0$. Donc f est dérivable en 0 de dérivée $f'(0) = 0$
De même $0 < \dfrac{\arctan(x^2)}{x} < x$ donne $\dfrac{F'(x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Donc $f'(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow}$
Donc f' est continue en 0. On en déduit que $f \in C^1(\mathbb{R})$.
4) On a $f(-x) = \dfrac{1}{-x}\displaystyle\int_0^{-x} \arctan(t^2)\ \mathrm{d}t = -\frac{1}{x}\int_0^x \arctan((-u)^2)(-\ \mathrm{d}u) = \frac{1}{x}\int_0^x \arctan(u^2)\ \mathrm{d}u = f(x)$.
Donc f est paire.
On étudie les variations de f sur $\mathbb{R}_+$:
$f'(x) \geq 0 \iff \dfrac{1}{x}(-f(x) + \arctan(x^2)) \geq 0 \iff \arctan(x^2) \geq f(x)$. C'est toujours vrai, en effet, d'après l'inégalité de la moyenne, on a $\displaystyle\int_0^x \arctan(t^2)\ \mathrm{d}t \leq x \max_{[0,x^2]} \arctan(t^2) = x\arctan(x^2)$
$\iff \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x \arctan(t^2)\ \mathrm{d}t \leq \arctan(x^2) \iff f(x) \leq \arctan(x^2)$. Donc $f' \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+$.
$\boxed{f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+, \text{ décroissante sur } \mathbb{R}_- \text{ et atteint un minimum en } 0}$.

5) On a d'après l'inégalité de la moyenne, $0 \leq f(x) \leq \arctan(x^2) \leq \dfrac{\pi}{2}$,

donc $\boxed{f \text{ est minorée par 0 et majorée par } \dfrac{\pi}{2}. \text{ Elle est donc bornée.}}$

Par ailleurs, comme f est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que $\boxed{f \text{ converge en } +\infty \text{ et en } -\infty}$ (vers la même limite, par parité).

Exercice 7 : Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, telle que pour toute fonction g continue sur $[a,b]$, on a $\displaystyle\int_a^b fg = 0$. Montrer que $f = 0$.

....

Réponse : Tout simplement, On pose $g = f$, on a alors $\displaystyle\int_a^b f^2 = 0$. Comme f^2 est continue (produit de fonctions continues) et positive on a $f^2 = 0$ sur $[a,b]$. Cela donne donc $\boxed{f = 0}$ sur $[a,b]$.

Exercice 8 : Soit f une fonction continue positive sur $[a,b]$. On pose $M = \sup\limits_{[a,b]} f$ et $I_n = \left(\displaystyle\int_a^b f^n\right)^{\frac{1}{n}}$

1) Justifier l'existence de M et montrer que $M \geq 0$

2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \leq M(b-a)^{\frac{1}{n}}$

3) Soit $\varepsilon > 0$, **a)** Montrer qu'il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > N_1, I_n < M + \varepsilon$

. **3.b)** Montrer qu'il existe un intervalle (non réduit à un point) $J = [c,d] \subset I$ tel que $\forall t \in J$, $f(t) \geq M - \dfrac{\varepsilon}{2}$

4) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

....

Réponse : **1)** f est continue sur le segment $[a,b]$ donc est bornée et atteint ses bornes.
$\boxed{M \text{ est donc le maximum de } f.}$ On a donc $\boxed{M = f(x_0) \geq 0}$ car f est positive.

2) Si on a $\forall x \in [a,b]$, $f(x) \leq M$ alors $\forall x \in [a,b]$, $f(x)^n \leq M^n$ car $f(x) > 0$ et $t \mapsto t^n$ croissante sur $\mathbb{R}^+$. D'ailleurs il y a égalité quand $x = x_0$, on en déduit que M^n est le max de f^n.

D'après l'inégalité de la moyenne, on a donc $\displaystyle\int_a^b f^n \leq (b-a)M^n$. Comme la fonction $t \mapsto t^{\frac{1}{n}}$ est croissante, on obtient $\boxed{I_n \leq (b-a)^{\frac{1}{n}} M}$

3) a) On a $(b-a)^{\frac{1}{n}} = \exp(\dfrac{1}{n}\ln(b-a)) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \exp(0) = 1$ donc $(b-a)^{\frac{1}{n}} M \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} n$.

Donc $\exists N_1 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N_1$, $\left|(b-a)^{\frac{1}{n}} M - M\right| < \varepsilon$

On a alors $\forall n \geq N_1, (b-a)^{\frac{1}{n}} M < M + \varepsilon$. Donc en conclusion : $\boxed{\forall n \geq N_1 \text{ , } I_n < M + \varepsilon.}$

. **3.b)** On a f continue donc $\exists \delta > 0 \mid |t - x_0| < \delta \implies |f(t) - M| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

On a alors $\forall t \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, $f(t) \in \left[M - \dfrac{\varepsilon}{2}, M + \dfrac{\varepsilon}{2}\right] \implies f(t) \geq M - \dfrac{\varepsilon}{2}$

Il suffit donc de poser $c = x_0 - \delta$ et $d = x_0 + \delta$ et on a le résultat.

4) Si on parvient à montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|I_n - M| \leq \varepsilon$, alors on a gagné.

<u>1er Cas : Si $M - \varepsilon < 0$</u> alors on a $\forall n \geq N_1$, $M - \varepsilon < 0 \leq I_n < M + \varepsilon$.

Ainsi $\forall n \geq N_1$, $|I_n - M| \leq \varepsilon$, le résultat est vrai.

<u>2eme Cas : Si $M - \varepsilon \geq 0$</u> Alors par croissance de $t \to t^n$ sur $\mathbb{R}_+$, on a $f^n(x) \geq \left(M - \dfrac{\varepsilon}{2}\right)^n$ pour $x \in [c,d]$.

Cela donne $\displaystyle\int_c^d f^n(x)\,\mathrm{d}x \geq \left(M - \frac{\varepsilon}{2}\right)^n (d-c)$

Or, comme f^n est positive, on a $\displaystyle\int_a^b f^n = \underbrace{\int_a^c f^n}_{\geq 0} + \int_c^d f^n + \underbrace{\int_d^b f^n}_{\geq 0} \geq \int_c^d f^n$

On a donc $\displaystyle\left(M - \frac{\varepsilon}{2}\right)^n (d-c) \leq \int_c^d f^n \leq \int_a^b f^n.$

Par croissance de $t \mapsto t^{\frac{1}{n}}$ sur $\mathbb{R}_+$, on a donc $\left(M - \frac{\varepsilon}{2}\right)(d-c)^{\frac{1}{n}} \leq I_n$.

On a par ailleurs $\left(M - \frac{\varepsilon}{2}\right)(d-c)^{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \left(M - \frac{\varepsilon}{2}\right) \cdot 1 = M - \frac{\varepsilon}{2}$.
Donc pour tout $\varepsilon' > 0$, $\exists N_2 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N_2$, $\left|\left(M - \frac{\varepsilon}{2}\right)(d-c)^{\frac{1}{n}} - \left(M - \frac{\varepsilon}{2}\right)\right| < \varepsilon'$. Choisissons $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2} > 0$, on a alors $\forall n \geq N_2$, $\left(M - \frac{\varepsilon}{2}\right)(d-c)^{\frac{1}{n}} > \left(M - \frac{\varepsilon}{2}\right) - \varepsilon' = M - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = M - \varepsilon$.
On obtient finalement, d'après la question 3), en posant $N = \max(N_1, N_2)$: $\forall n \geq N$, $M - \varepsilon < I_n < M + \varepsilon$.

D'où le résultat : $\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid |I_n - M| \leq \varepsilon}$

En conséquence : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = M = \max_{[a,b]} f}$.

Développements limités

Exercice 1 : Calculer le DL à l'ordre 4 en 0 des fonctions suivantes : **1)** $x \mapsto \cos x - e^x$
2) $x \mapsto (1+x^2)\exp x$ **3)** $x \mapsto \sqrt{x^5 + x^4}$ **4)** $x \mapsto xe^x - x^2 \cos x$ **5)** $x \mapsto \sin(3x)$ **6)** $x \mapsto (\ln x)^2$
7) $x \mapsto \tan x$ **8)** $x \mapsto \ln(\cos x)$ **9)** $x \mapsto \ln(2+x)$ **10)** $x \mapsto \cos(3x+1)$ **11)** $x \mapsto \cos^\pi(x)$

....

Réponse : **1)** $\boxed{-x - x^2 - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)}$ **2)** $\boxed{1 + x + \frac{3x^2}{2} + \frac{7x^3}{6} + \frac{13x^4}{12} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)}$

3) On réécrit : $\sqrt{x^5 + x^4} = x^2\sqrt{1+x} = \boxed{x^2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)}$ **4)** $\boxed{x + \frac{x^3}{6} + \frac{2x^4}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)}$

5) $\boxed{3x - \frac{9x^3}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)}$ **6)** $\boxed{x^2 - x^3 + \frac{11}{4}x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4)}$

7) $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)}{1 - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)} = \left(x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)\right)$

$= x + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$ Finalement : $\boxed{\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^4).}$

8) $\ln(\cos x) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)\right) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$

$= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + \underset{x\to 0}{o}(x^4) = \boxed{-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)}$

9) $\ln(2+x) = \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{x}{2}\right) = \boxed{\ln 2 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{48} - \frac{x^4}{284} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)}$

10) $\cos(3x+1) = \cos(3x)\cos(1) - \sin(3x)\sin(1) = \boxed{\cos 1 + 3\sin 1 \cdot x - \frac{9\cos 1}{4}x^2 - \frac{9\sin 1}{2}x^3 + \frac{27\cos 1}{8}x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4)}$

11) $\cos^\pi(x) = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)\right)^\pi = 1 + \pi\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + \frac{\pi(\pi-1)}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$

$= \boxed{1 - \frac{\pi}{2}x^2 + \frac{(3\pi - 2)\pi}{24}x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4)}$.

Exercice 2 : Calculer les limites suivantes : **1)** $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$ **2)** $\lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x - 1 - x}$
3) $\lim_{x\to+\infty} x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - x$ **4)** $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\tan x} - \frac{1}{x}$ **5)** $\lim_{x\to+\infty} x^2 - \frac{x}{2} - \left(x^3 + \frac{x}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

....

Réponses : **1)** $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=\frac{-1}{2}}$ car $\cos x-1\underset{x\to 0}{\sim}\frac{-x^2}{2}$

2) $\boxed{\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{e^x-1-x}=+\infty}$ et $\boxed{\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{e^x-1-x}=-\infty}$ car $\frac{x}{e^x-1-x}\underset{x\to 0}{\sim}\frac{x}{x^2/2}=\frac{2}{x}$.

3) $x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-x=x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)+x=x-\frac{1}{2}-x+\underset{x\to+\infty}{o}(1)=-\frac{1}{2}+\underset{x\to+\infty}{o}(1)$

En conclusion $\boxed{\lim_{x\to+\infty}x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-x=-\frac{1}{2}}$

4) $\frac{1}{\tan x}-\frac{1}{x}=\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}=\frac{-\frac{x^3}{4}-\frac{x^3}{6}+\underset{x\to 0}{o}(x^3)}{x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^3)}\underset{x\to 0}{\sim}\frac{5x}{12}$ Donc $\boxed{\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\tan x}-\frac{1}{x}=0}$

5) $x^2-\left(x^3+\frac{x^2}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=x^2-\left(x^3+\frac{x^2}{2}\right)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{3x^3}+\underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)=$
$x^2-x^2+\frac{x}{2}-\frac{1}{3}-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}+\underset{x\to+\infty}{o}(1)=\frac{1}{6}+\underset{x\to+\infty}{o}(1)$.

Finalement $\boxed{\lim_{x\to+\infty}x^2-\left(x^3+\frac{x^2}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{6}}$

Exercice 3 : **1)** Justifier que pour tout $n\in\mathbb{N}$, la fonction $x\mapsto(x+1)^x$ admet un DL à l'ordre n en 0.
2) Calculer son DL à l'ordre 3 en 0. **3)** En déduire $\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^x-1-x^2}{x^3}$.

. . . .

Réponses : **1)** $f(x)=(x+1)^x=\exp(x\ln(1+x))$. Or $x\mapsto\ln(1+x)$ est de classe C^∞ sur $]-1,+\infty[$ donc f par composition de fonctions C^∞, f est aussi de classe C^∞ sir $]-1,\infty[$
On en déduit que f est n-fois dérivable en 0 et donc d'après la formule de Taylor-Young, elle admet un DL à l'ordre n en 0.

2) $\exp(x\ln(1+x))=\exp\left(x\left(x-\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)\right)=\exp\left(x^2-\frac{x^3}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)=\boxed{1+x^2-\frac{x^3}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x^3)}$

3) On a $\frac{(x+1)^x-1-x^2}{x^3}\underset{x\to 0}{\sim}\frac{-x^3/2}{x^3}=\frac{-1}{2}$ Donc $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^x-1-x^2}{x^3}=\frac{-1}{2}}$.

Exercice 4 : Soit f est de classe C^n sur I avec $0\in I$ avec $f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+\underset{x\to 0}{o}(x^n)$

1) Montrer que la fonction $x\mapsto\int_0^x f$ admet un DL à l'ordre $n+1$ en 0 et le calculer en fonction de celui de f.

2) En déduire le DL de arctan en 0 à l'ordre n.

3) Calculer le DL à l'ordre 10 en 0 de $x\mapsto\int_0^x\frac{1}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$

. . . .

Réponses :

1) $F:x\to\int_0^x f$ est une primitive de f, donc comme $F'=f$ est de classe C^n, on a F qui est de classe C^{n+1}. Elle admet donc un DL à l'ordre $n+1$ d'après la formule de Taylor-Young :

$$F(x)=\sum_{k=0}^{n+1}\frac{F^{(k)}(x)}{k!}x^k+\underset{x\to 0}{o}(x^{n+1})\underbrace{=}_{F(0)=0}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{F^{(k)}(x)}{k!}x^k+\underset{x\to 0}{o}(x^{n+1})\underbrace{=}_{k'=k-1}\sum_{k=0}^{n}\frac{F^{(k+1)}(x)}{(k+1)!}x^k+\underset{x\to 0}{o}(x^{n+1})$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x)}{(k+1)!}x^k+\underset{x\to 0}{o}(x^{n+1})=\boxed{\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{k+1}x^{k+1}+\underset{x\to 0}{o}(x^{n+1})=a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\ldots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+\underset{x\to 0}{o}(x^{n+1})}$$

Remarque : C'est comme si on avait "primitivé" le DL de f.

2) On a $\arctan x=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ avec $\frac{1}{1+t^2}=1-t^2+t^4+\ldots+(-1)^nt^{2n}+\underset{t\to 0}{o}(t^{2n})$

On en déduit, en primitivant : $\boxed{\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1})}$.

3) C'est le même principe. On a $\frac{1}{1+t^4} = 1 - t^4 + t^8 + \underset{t\to 0}{o}(t^9)$

Donc en primitivant, on trouve : $\boxed{\int_0^x \frac{1}{1+t^4}\,\mathrm{d}t = x - \frac{x^5}{5} + \frac{x^9}{9} + \underset{x\to 0}{o}(x^{10})}$.

Exercice 5 : Calculer le DL à l'ordre n de $f : x \mapsto \frac{x^4}{1-x^2}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en déduire la valeur de $f^{(n)}(0)$.

....

Réponses :
On a $f(x) = x^4 \frac{1}{1+x^2} = x^4\left(1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n})\right) = x^4 + x^6 + \ldots x^{2n+4} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+4})$.
Si on donne le DL de f à l'ordre $2n$, on obtient donc : $\sum_{k=2}^{n} x^{2k} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n})$.
Or, comme f est de classe C^∞ en 0 ($f \in C^\infty(]-1,1[)$ car $x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$ est C^∞ sur $]-1,1[$), on peut utiliser la formule de Taylor Young pour avoir :
$f(x) = \sum_{\ell=0}^{2n} \frac{f^{(\ell)}(0)}{\ell!}x^\ell + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n})$.
Par unicité du DL, on en déduit : si $\ell = 2k+1$ ou $\ell < 4$, alors $f^{(\ell)}(0) = 0$, sinon $f^{(\ell)}(0) = 1$.
Conclusion : $\boxed{f^{(\ell)}(0) = \begin{cases} 0 \text{ si } \ell \text{ impaire ou } \ell < 4 \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}}$

Exercice 6 : **1)** Soit P un polynôme de degré n, démontrer que $P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!}X^k$.
2) Si $P = (X^n+1)^n$, en déduire les trois derniers coefficients de ce polynôme (devant X^0, X et X^2).

....

Réponses : **1)** On note $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. C'est à dire, en terme de fonctions polynômiales : $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.
On remarque que c'est un DL à l'ordre n, donc comme P est de classe C^∞ donc n fois dérivable en 0, d'après la formule de Taylor-Young : $P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!}x^k + \underset{x\to 0}{o}x^k$. par unicité du DL de P, on trouve $a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}$.

Donc $\boxed{P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!}X^k}$

2) $P'(X) = n^2X^{n-1}(X^n+1)^{n-1} = n^2(X^{n+1}+X)^n$ et $P''(X) = n^2(n-1)((n+1)X^n+1)(X^n+1)^{n-2}$
Le coefficient devant X^0 : $a_0 = P(0) = \boxed{1}$ Le coefficient devant X^1 : $a_1 = P'(0) = \boxed{2}$

Le coefficient devant X^2 : $a_2 = \frac{P''(0)}{2} = \boxed{\frac{n^2(n-1)}{2}}$

Exercice 7 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n sur $\mathbb{R}$. (on pourra utiliser l'exercice 6).
1) Montrer qu'il existe un unique polynôme P de degré n tel que $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $P^{(k)}(0) = f^{(k)}(0)$.
2) Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour avoir $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $Q^{(k)}(0) = f^{(k)}(0)$.

....

Réponses : **1)** Analyse : D'après l'exercice précédent, pour tout polynôme P de degré n, on a $P =$

$\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!}X^k$. Ainsi, on a un seul polynôme possible : $\boxed{P = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}X^k}$

Synthèse : Vérifions que P est bien solution.P est bien de dégré n et on a, d'après le développement de la question 1) de l'ex 6 :

$\forall k \in [\![0,n]\!]$, $P^{(k)}(0) = k!a_k = k!\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = f^{(k)}(0)$, a_k étant le k^{ieme} coefficient de P. Donc P est valide.

2) Analyse : Si Q vérifie cela, alors $Q - P$ vérifie : $\forall k \in [\![0,n]\!](P-Q)^{(k)}(0) = 0$. Cela revient à dire que 0 est une racine d'ordre $n+1$ de $P - Q$. C'est à dire $P - Q = X^{n+1}R$ avec $R \in \mathbb{R}[X]$

Donc $\boxed{Q = X^{n+1}R + P \text{ avec } R \in \mathbb{R}[X]}$. Synthèse : Si on a $Q = X^{n+1}R + P$ alors $P - Q$ admet bien 0 pour racine d'ordre $n+1$ donc $\forall k \in [\![0,n]\!](P-Q)^{(k)}(0) = 0$ donc $\forall k \in [\![0,n]\!]Q^{(k)}(0) = P^{(k)}(0) = f^{(k)}(0)$. Donc les polynômes Q qui vérifient cela sont les seuls polynômes valides.

Exercice 8 : Montrer que $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ peut être prolongée en une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

....

Réponses : On pose $f(x) = \frac{x}{e^x-1}$. On a $x \mapsto e^x - 1$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ à valeur dans $\mathbb{R}^*$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$, donc par composition et par produit, on a déjà $f \in C^1(\mathbb{R}^*)$. Reste à montrer le caractère C^1 en 0.

On a $f(x) = \frac{x}{e^x-1} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{x} = 1$, ainsi $\boxed{f \text{ peut être prolongée par continuité en 0 en posant } f(0) = 1}$.

On a alors $\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{1}{x}\left(\frac{x}{e^x-1} - 1\right) = \frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x} = \frac{x+1-e^x}{x(e^x-1)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-x^2/2}{x^2} = \frac{-1}{2}$.

Ainsi f est dérivable en 0 avec $\boxed{f'(0) = \frac{-1}{2}}$. Reste à montrer que f' est continue en 0. On a :

$\forall x \neq 0$, $f'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x-1)^2} = \frac{x + x^2/2 - x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)}{(e^x-1)^2} = \frac{-x^2/2 + \underset{x\to 0}{o}}{(e^x-1)^2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-x^2/2}{x^2} = \frac{-1}{2}$ donc $f'(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{-1}{2}$ et $\boxed{f' \text{ est continue en 0}}$. Donc $\boxed{f \in C^1(\mathbb{R})}$

Exercice 9 : On pose $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x$.

1) Montrer que f est bijective sur $[-1, +\infty[$. On note f^{-1} sa réciproque.

2) Montrer que f^{-1} est de classe C^∞ sur son ensemble de définition ouvert.

3) Calculer le DL à l'ordre 4 de f^{-1} en 0.

....

Réponses : **1)** Classico, on l'a déjà fait dans le TD sur la continuité : faire l'étude de fonction et voir qu'elle est strictement croissante sur $[-1, +\infty[$.

2) Par récurrence. on montre que $f^{-1} \in C^n\big(]-e^{-1}, iip[\big)$

Initialisation : On sait que f^{-1} est continue par théorème de la bijection continue. Donc $f^{-1} \in C^0\big([-e^{-1}, iip[\big)$

Hérédité : Si c'est vrai au rang n alors au rang $n+1$, comme on a $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$

Par hyp de rec, on a f^{-1} de classe C^n de $]-e^{-1}$,

$iip[$ à valeur dans $]-1, +\infty[$

et f' de classe C^n sur $]-1, +\infty[$ à valeur dans $\mathbb{R}^*$

enfin $x \mapsto \frac{1}{x}$ de classe C^n sur $\mathbb{R}^*$. Donc $(f^{-1})'$ est de casse C^n par composée de fonctions de classe C^n et donc $f^{-1} \in C^{n+1}\big(]-e^{-1}, iip[\big)$

Conclusion : Comme c'est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient $\boxed{f^{-1} \in C^\infty\big(]-e^{-1}, +\infty[\big)}$.

3) On a $f^{-1}(0) = 0$ car $f(0) = 0$. Par ailleurs, $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(0)} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{1} = 1$. On pourrait continuer comme ça, dériver l'expression de $(f^{-1})'$ pour obtenir les suivants.

Autre méthode : On sait que f^{-1} admet un DL à l'ordre 4 car elle est de classe C^4. On peut donc écrire

$f^{-1}(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + o(x^4)$. Avec $a = f(0) = 0$ et $b = f'(0) = 1$ d'après ce qu'on vient de dire.
Alors on utilise $f \circ f^{-1}(x) = x$ sachant que $f(x) = xe^x = x + x^2 + \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{x^4}{6} + o(x^4)$.
On a : $(x+cx^2+dx^3+ex^4)+(x+cx^2+dx^3+ex^4)^2+\dfrac{1}{2}(x+cx^2+dx^3+ex^4)^3+\dfrac{1}{6}(x+cx^2+dx^3+ex^4)^4+o(x^4) = x$.
$\iff x + cx^2 + dx^3 + ex^4 + x^2 + c^2x^4 + 2cx^3 + 2dx^4 + \dfrac{x^3 + 3cx^4}{2} + \dfrac{x^4}{6} + o(x^4) = x$
$\iff x + (c+1)x^2 + \left(d + 2c + \dfrac{1}{2}\right)x^3 + \left(e + c^2 + \dfrac{3c}{2} + 2d + \dfrac{1}{6}\right)x^4 + o(x^4) = x$ Par unicité du DL, on trouve le système suivant :

$$\begin{cases} c+1=0 \\ d+2c+\dfrac{1}{2}=0 \\ e+c^2+\dfrac{3c}{2}+2d+\dfrac{1}{6}=0 \end{cases} \iff \begin{cases} c=-1 \\ d-2+\dfrac{1}{2}=0 \\ e+1-\dfrac{3}{2}+2d+\dfrac{1}{6}=0 \end{cases} \iff \begin{cases} c=-1 \\ d=\dfrac{3}{2} \\ e+2d=\dfrac{1}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} c=-1 \\ d=\dfrac{3}{2} \\ e+3=\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} c=-1 \\ d=\dfrac{3}{2} \\ e=\dfrac{-8}{3} \end{cases} \quad \text{Finalement } \boxed{f^{-1}(x) = x - x^2 + \dfrac{3}{2}x^3 - \dfrac{8}{3}x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4)}$$

<u>Exercice 10</u> : Montrer que $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ prolongeable en une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et calculer son DL à l'ordre 2 en 0.

. . . .

Réponses : On pose $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. On a déjà que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$, donc le seul problème à vérifier est en 0.
On a $\dfrac{\sin x}{x} \underset{x\to 1}{\longrightarrow}$ donc f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$.
Par ailleurs, $f'(x) = \dfrac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^3/3}{x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$
De même, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \dfrac{\sin x - x}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^3/6}{x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ donc $\boxed{f'(0) = 0 \text{ est vérifié et } f' \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$.
On a $f''(x) = \dfrac{(\cos x + x\sin x - \cos x)\sin^2 x - 2\cos x \sin x(\sin x - x\cos x)}{(\sin x)^4} = \dfrac{x\sin^2 x + 2x\cos^2 x - 2\cos x \sin x}{\sin^3 x}$
$= \dfrac{x + x\cos^2(x) - 2\sin(2x)}{\sin^3 x} = \dfrac{\frac{x}{2}\cos(2x) + \frac{3x}{2} - \sin(2x)}{\sin^3 x} = \dfrac{x\cos(2x) - 2\sin(2x) + 3x}{2\sin^3 x}$
Par ailleurs $x\cos(2x) - 4\sin(2x) + 3x = x - \dfrac{x(2x)^2}{2} - 4x + \dfrac{2(2x)^3}{6} + 3x + o(x^3) = \dfrac{2x^3}{3} + o(x^3)$
Finalement $f''(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{2x^3/3}{2x^3} = \dfrac{1}{3} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \dfrac{1}{3}$.
On a ensuite $\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x} = \dfrac{f'(x)}{x} = \dfrac{\sin x - x\cos x}{x\sin^2 x} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^3/3}{x^3} = \dfrac{1}{3}$. Donc $\boxed{f''(0) = \dfrac{1}{3} \text{ et } f'' \text{ est continue en } 0}$.
On en déduit $\boxed{f \in C^2(\mathbb{R})}$.

On a $f(x) = \dfrac{x + x^3/6 + o(x^3)}{x} = \boxed{1 + \dfrac{x^2}{3} + o(x^2)}$.

<u>Exercice 11</u> : Soit $a \in \mathbb{R}^*$. On pose $f(x) = \dfrac{\ln(1+ax)}{1+x}$. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles f présente un point d'inflexion en 0.
Remarque : Un point d'inflexion est un point au voisinage duquel la courbe de f traverse sa tangente (la courbe de f n'est pas entièrement au dessus, ni entièrement en dessous)
. . . .

Réponses : Analyse : Faisons un DL à l'ordre 3 de f :

On a $f(x)=\left(ax-\dfrac{a^2x^2}{2}+\dfrac{a^3x^3}{3}+o(x^3)\right)(1-x+x^2+o(x^2))$
$=ax-\dfrac{a^2x^2}{2}+\dfrac{a^3x^3}{3}-ax^2+\dfrac{a^2x^3}{2}+ax^3+o(x^3)=ax-\dfrac{(a+2)a}{2}x^2+\dfrac{(2a^2+3a+6)a}{6}x^3+o(x^3)$.

La tangente de f en 0 est $y=ax$. Ainsi : $f(x)-ax=\dfrac{(a+2)a}{2}x^2+\dfrac{(2a^2+3a+6)a}{6}x^3+o(x^3)$ donne le signe de $f-ax$ au voisinage de 0. Si c'est un point d'inflexion, alors f traverse la tangente, le signe doit donc varier.
Or si $\dfrac{(a+2)a}{2}\neq 0$, le signe est constant : $\dfrac{(a+2)a}{2}x^2$ est positif ou négatif, selon le signe de $\dfrac{(a+2)a}{2}$.
Pour avoir un point d'inflexion en 0, il faut donc avoir $a=-2$ ou $a=0$. Pour faire la Synthèse, étudions ces cas :

Synthèse :
a = -2, alors $f(x)=\dfrac{8}{3}x^3+o(x^3)\underset{x\to 0}{\sim}\dfrac{8x^3}{6}$, donc $x\mapsto f(x)-ax$ est du même signe que $x\to x^3$, qui change de signe en 0, cela veut dire que f traverse la tangente. $\boxed{a=-2 \text{ est un point d'inflexion}}$.
a = 0, alors $f(x)=o(x^3)$ ce qui ne donne pas d'info sur le comportement de f... Et pour cause : revenons à la définition, on a $f(x)=\dfrac{\ln(1)}{1+x}=0$. Donc $f=0$. La courbe ainsi définie n'admet pas de point d'inflexion.

$\boxed{\text{Le seul cas où } f \text{ présente un point d'inflexion en 0 est } a=-2.}$

Exercice 12 : On pose $f(x)=xe^{-x}$. Montrer que la courbe de f présente un point d'inflexion dont on précisera les coordonnées. Tracer la courbe de f.

. . . .

Réponse : Un point d'inflexion n'arrive qu'à condition que la dérivée seconde s'annule (voir l'exercice précédent).
Dons notre cas, f est de classe C^∞ et on a : On a $f'(x)=(1-x)e^{-x}$ et $f''(x)=(x-2)e^{-x}$ donc $f''(x)=0 \iff x=2$. Le seul point d'inflexion possible est en $x=2$.
L'équation de la tangente à f en 2 vaut $y(x)=-e^{-2}(x-2)+2e^{-2}$
Au point $x=2$, on a alors : $f'''(x)=(3-x)e^{-x}$, donc $f'''(2)=e^{-2}>0$, cela veut dire que $f(x)-y(x)\underset{x\to 2}{\sim}\dfrac{e^{-2}}{6}(x-2)^3$ est de signe variable au voisinage de 2. $\boxed{\text{Donc la courbe de } f \text{ admet un point d'inflexion d'abscisse } x=2}$.