TD 20 - Applications Linéaires

1BCPST 2 | Feuille d'exercice | Année 2023- 2024

Applications linéaires

Exercice 1 : *(en 2 minutes ♡)* Dans chaque cas dire si f est une application linéaire ou pas. Si oui trouver une base de son image et son noyau et dire si elle est injective ou surjective.

1) $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \to x \end{cases}$ **2)** $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to 2 \end{cases}$ **3)** $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \to (y,x) \end{cases}$ **4)** $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \\ x \to (x,0,x) \end{cases}$

5) $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \\ x \to (x,-x,1) \end{cases}$ **6)** $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) \to (x-z,2y) \end{cases}$ **7)** $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) \to (xy,xz,zy) \end{cases}$

Exercice 2 : ★ Trouver une base de l'image et du noyau de f et dire si elle est injective ou surjective.
1) $f : (x,y,z,t) \to (x-y, z-t, t+x, z+y)$ **2)** $f : (x,y,z,t) \to (x+3y+z+t, 2x+y+z-t, x+z)$
3) $f : (x,y,z,t,w) \to (x+z+t+w, y+2z+3t+w)$
4) $f : (x,y,z) \to (2x+y+3z, 5x-3y-z, x+2y-2z)$

Exercice 3 : ★★ Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$ on pose $g : \begin{cases} (\mathbb{K}^n)^2 & \to & \mathbb{K}^n \\ (x,y) & \mapsto & f(x)+f(y) \end{cases}$
Dans cet exercice on identifie $(\mathbb{K}^n)^2$ à $\mathbb{K}^{2n}$.
1) Montrer que $g \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^{2n}, \mathbb{K}^n)$. **2)** Calculer $\mathrm{Im}(g)$ et $\mathrm{rg}(g)$
3) Calculer $\dim \mathrm{Ker}(g)$ en fonction du rang de f.
4) On suppose que f est injective, donner une base de $\mathrm{Ker}(g)$.
5) Donner la matrice de g dans la base canonique en fonction de la matrice A de f dans la base canonique.

Exercice 4 : ★★ On pose $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$. On pose $h : \begin{cases} \mathbb{K}^n & \to & \mathbb{K}^{2n} \\ x & \mapsto & (f(x), g(x)) \end{cases}$
Dans cet exercice on identifie $(\mathbb{K}^n)^2$ à $\mathbb{K}^{2n}$.
1) Montrer que h est une application linéaire.
2) Exprimer $\mathrm{Ker}h$ avec de $\mathrm{Ker}f$ et $\mathrm{Ker}g$ **3)** Exprimer $\mathrm{rg}(h)$ en fonction de $\mathrm{rg}(f)$ et $\mathrm{rg}(g)$.
4) Soient A et B sont respectivement les matrices de f et g dans la base canonique. Donner la matrice de h dans la base canonique en fonction de A et B.

Exercice 5 : ★ Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ non nulle. Calculer $\mathrm{rg}(f)$.

Exercice 6 : ★★★ Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$. Montrer que $\dim \mathrm{Ker}(g \circ f) \leq \dim \mathrm{Ker}g + \dim \mathrm{Ker}f$.

Exercice 7 : ★★ Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ une application linéaire telle que $\mathrm{Ker}(f \circ f) = \mathrm{Ker}f$.
Montrer que $\mathrm{Im}(f \circ f) = \mathrm{Im}f$

Exercice 8 : ★★ - ★★★ Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f \circ f = f + \mathrm{id}_E$. Montrer que f est un isomorphisme.

Exercice 9 : Soit $f \in \mathcal{L}(E,E)$ une application linéaire. **1)** Justifier que $f^n \in \mathcal{L}(E,E)$.
2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Ker}f^{n-1} \subset \mathrm{Ker}f^n$.
3) En déduire que les suites $(\mathrm{rg}\ f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\dim \mathrm{Ker}f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.
4) Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Ker}(f^p) = \mathrm{Ker}(f^{p+1})$.
5) Montrer que $\forall n \geq p$, $\mathrm{Ker}(f^n) = \mathrm{Ker}(f^p)$ et $\mathrm{Im}(f^n) = \mathrm{Im}(f^p)$
6) On pose $p_0 = \min\limits_{p\in\mathbb{N}} \{p \in \mathbb{N} \mid \mathrm{Ker}(f^p) = \mathrm{Ker}(f^{p+1})\}$:
. **6.a)** Justifier l'existence de p_0 . **6.b)** Si f est un isomorphisme, calculer p_0.
. **6.c)** Si f est un projecteur, calculer p_0. . **6.d)** Soit $f : (x,y,z) \to (x,x,x)$ calculer p_0 pour f
. **6.e)** Pour f quelconque, montrer que $p_0 \geq n - \mathrm{rg}f$

Exercice 10 : ★★ Soit E un espace vectoriel avec $\dim E = n$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ une application nilpotente d'indice n, c'est à dire :

$$\exists n \in \mathbb{N} \mid f^n = 0 \text{ et } f^{n-1} \neq 0$$

1) Montrer que f n'est pas inversible.
2) Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $B = (x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E
3) En déduire le rang de f. **4)** Donner une base de $\mathrm{Ker}f$. **5)** Donner la matrice de f dans la base B.

Matrices

Exercice 11 : *(en 1 minute ♡)* Donner une base pour l'image et le noyau de A puis dire si la matrice est inversible ou non.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ **2)** $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ **3)** $\begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ **4)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ **5)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ **6)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 12 : ★ Donner une base pour l'image et le noyau de A puis dire si la matrice est inversible..

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **2)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \\ 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ **3)** $\begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **4)** $\begin{pmatrix} 5 & -15 & 10 \\ 25 & 20 & -5 \\ 10 & 10 & 5 \end{pmatrix}$ **5)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ **7)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **8)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{pmatrix}$

Exercice 13 : ★ - ★★ Calculer l'image et le noyau de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ puis dire si la matrice est inversible ou non. (On pourra noter $(e_1, \dots, e_n)$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$).

1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **2)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **3)** $J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ **4)** $J - I_n$

5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ n+1 & n+2 & n+3 & \dots & 2n \\ 2n+1 & 2n+2 & 3n+3 & \dots & 3n \\ \vdots & & & & \vdots \\ (n-1)n+1 & (n-1)n+2 & (n-1)n+3 & \dots & n^2 \end{pmatrix}$ **6)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ (-1)^{n+1} & (-1)^{n+1} & \dots & (-1)^{n+1} & (-1)^{n+1} \end{pmatrix}$

Changement de base

Exercice 14 : ★ soit $f : (x, y) \mapsto (x + y, x - y)$ et $g : (x, y) \mapsto (x + 2y, y)$

1) Donner la matrice de f et g dans la base canonique.

2) Calculer la matrice de f et g dans la base $B = ((1, 1), (1, -1))$.

Exercice 15 : ★ soit f une application linéaire telle que $\mathrm{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ avec $B = ((1, 1, 1), (1, -1, 2), (1, 0, 1))$.
Calculer $f(x, y, z)$, pour $x, y, z \in \mathbb{R}^3$

Exercice 16 : ★ Soit $f : (x, y, z, t) \to (x + y, x - z, x + t, y + z + t)$ **1)** Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$.

2) Montrer que $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathbb{R}^4$. **3)** Calculer $\mathrm{Mat}_B(f)$.

Exercice 17 : ★★ On pose $f : (x, y, z) \mapsto (x + y + z, 2y + z, z)$

1) Montrer que $E = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid f(v) = v\}$ est un espace vectoriel.

2) Montrer que $\dim E = 2$ et trouver $B = (e_1, e_2)$ une base de E.

3) Montrer qu'il existe $\lambda \neq 1$ et $e_3 \in \mathbb{R}^3$ non nul tel que $f(e_3) = \lambda e_3$. On explicitera λ et e_3.

4) Montrer que $B = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E.

5) Donner la matrice de f dans cette base. En déduire la matrice de f^n.

6) En déduire la matrice de f^n dans la base canonique.

Exercice 18 : ★★
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\mathrm{Mat}_B(f)$ est la même pour toute base B de E. Montrer que $f = \lambda \mathrm{id}_E$.