TD 20 - Applications Linéaires

1BCPST 2 Feuille d'exercice Année 2022- 2023

Applications linéaires

Exercice 1 : *(en 2 minutes)* Dans chaque cas dire si f est une application linéaire ou pas. Si oui calculer son image et son noyau et dire si elle est injective ou surjective.

1) $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \to x \end{cases}$ **2)** $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to 2 \end{cases}$ **3)** $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \to (y,x) \end{cases}$ **4)** $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \\ x \to (x,0,x) \end{cases}$

5) $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \\ x \to (x,-x,1) \end{cases}$ **6)** $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) \to (x-z,2y) \end{cases}$ **7)** $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) \to (xy,xz,zy) \end{cases}$

. . . .

Réponses : **1)** $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Vect}((0,1))$, $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(1,0)$ pas injective, ni surjective, ni bijective.
2) f n'est pas linéaire car $f(0) = 2 \neq 0$ **3)** On a $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, $\mathrm{Ker} f = \{0\}$, $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}^2$, f est bijective.
4) $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$, $\mathrm{Ker} f = \{0\}$, $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}((1,0,1))$ injective, non surjective, ni bijective.
5) f n'est pas linéaire car $f(0) = (0,0,1) \neq 0$.
6) $f \in \mathcal{L}(\_R^3, R^2)$, $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Vect}((1,0,1))$, $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}^2$ surjective, non injective, non bijective.
7) f n'est pas linéaire car $f(0,0,1) + f(1,0,0) = (0,0,0) \neq f(1,0,1) = (0,1,0)$.

Exercice 2 : Trouver une base de l'image et du noyau de f et dire si elle est injective ou surjective.
1) $f : (x,y,z,t) \to (x-y, z-t, t+x, z+y)$ **2)** $f : (x,y,z,t) \to (x+3y+z+t, 2x+y+z-t, x+z)$
3) $f : (x,y,z,t,w) \to (x+z+t+w, y+2z+3t+w)$
4) $f : (x,y,z) \to (2x+y+3z, 5x-3y-z, x+2y-2z)$

. . . .

Réponses : **1)** On a bien $f(x,y,z,t) + \lambda f(x',y',z',t') = f(x+\lambda x', y+\lambda y', z+\lambda z', t+\lambda t')$ donc $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$.

On a $(x,y,z,t) \in \mathrm{Ker} f \iff \begin{cases} x-y=0 \\ z-t=0 \\ t+x=0 \\ z+y=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=y \\ z=t \\ z+y=0 \\ z+y=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=-t \\ z=t \\ y=-t \\ 0=0 \end{cases}$

Donc $(x,y,z,t) = (-t,-t,t,t) = t(-1,-1,1,1)$. Ainsi $\boxed{\mathrm{Ker} f = \mathrm{Vect}((-1,-1,1,1))}$. C'est bien une base de $\mathrm{Ker} f$ car il s'agit d'un vecteur non nul. Ainsi $\boxed{f \text{ n'est pas injective}}$. Par théorème du rang, on a $\mathrm{rg} f = 3 < 4 = \dim \mathbb{R}^4$ donc $\boxed{f \text{ n'est pas surjective}}$.

Par ailleurs, $f(x) = x(1,0,1,0) + y(-1,0,0,1) + z(0,1,0,1) + t(0,-1,1,0)$ donc $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((1,0,1,0), (-1,0,0,1), (0,1,0,1), (0,-1,1,0))$. Mais il y a un vecteur en trop car $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension $3 = \mathrm{rg} f$. On peut retirer n'importe lequel, tant qu'on obtient une famille libre ensuite. Par exemple, on retire le dernier, $(0,1,-1,0)$ on a alors : $(1,0,1,0) + (-1,0,0,1) = (0,0,1,1)$ donc $\boxed{\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}((1,0,1,0), (0,1,0,1), (0,0,1,1))}$ et c'est clairement une famille libre car elle est "échelonnée". C'est donc une base car elle possède 3 vecteurs.

2) On a bien $f(x,y,z,t) + \lambda f(x',y',z',t') = f(x+\lambda x', y+\lambda y', z+\lambda z', t+\lambda t')$ donc $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$.

On a $(x,y,z,t) \in \mathrm{Ker} f \iff \begin{cases} x+3y+z+t=0 \\ 2x+y+z-t=0 \\ x+z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+z=0 \\ x+3y+z+t=0 \\ 2x+y+z-t=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+z=0 \\ 3y+t=0 \\ x+y-t=0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x+z=0 \\ 3y+t=0 \\ x+4y=0 \end{cases} \iff \begin{cases} z=4y \\ t=-3y \\ x=-4y \end{cases}$ Donc $(x,y,z,t) = (-4y,y,4y,-3y) = y(-4,1,4,-3)$. Ainsi $\boxed{\mathrm{Ker} f = \mathrm{Vect}((-4,1,4,-3))}$. C'est bien une base de $\mathrm{Ker} f$ car il s'agit d'un vecteur non nul. Ainsi $\boxed{f \text{ n'est pas injective}}$.

Par théorème du rang, on a $\mathrm{rg} f = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \mathrm{Ker} f = 4 - 1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ donc $\boxed{\mathrm{Im} f = \mathbb{R}^3}$ et $\boxed{f \text{ est surjective}}$. (Une base de $\mathrm{Im} f$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$)

3) On a $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^5, \mathbb{R}^2)$. On a $(x,y,z,t,w) \in \mathrm{Ker}(f) \iff$

$\begin{cases} x+z+t+w=0 \\ y+2z+3t+w=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=-z-t-w \\ y=-2z-3t-w \end{cases}$ Le système est échelonné dès le départ. On a donc $(x,y,z,t,w)=(-z-t-w,-2z-3t-w,z,t,w)=z(-1,-2,1,0,0)+t(-1,-3,0,1,0)+w(-1,-1,0,0,1)$ ainsi $\boxed{\text{Ker}(f)=\text{Vect}((-1,-2,1,0,0),(-1,-3,0,1,0),(-1,-1,0,0,1))}$. C'est bien une famille libre car les vecteurs sont échelonnés sur les 3 dernières coordonnées, c'est donc une base de Ker$f$. Ainsi $\boxed{f \text{ n'est pas injective}}$.
$\text{rg}f=\dim\mathbb{R}^5-\dim\text{Ker}f=5-3=2=\dim\mathbb{R}^2$ donc $\boxed{\text{Im}f=\mathbb{R}^2}$ et $\boxed{f \text{ est surjective}}$. (Une base de Im$f$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$)

4) On a bien $f\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ par ailleurs on a $(x,y,z)\in\text{Ker}f \iff \begin{cases} 2x+y+3z=0 \\ 5x-3y-z=0 \\ x+2y-2z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x+y+3z=0 \\ 11x+8z=0 \\ -3x-8z=0 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x+y+3z=0 \\ 11x+8z=0 \\ 8x=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=0 \\ z=0 \\ x=0 \end{cases}$ Donc $\boxed{\text{Ker}(f)=\{0\}}$ et $\boxed{f \text{ est injective}}$. Par théorème du rang, on a $\text{rg}f=\dim\mathbb{R}^3-\dim\text{Ker}f=3-0=3=\dim\mathbb{R}^3$ donc $\boxed{\text{Im}f=\mathbb{R}^3}$ et $\boxed{f \text{ est surjective, donc bijective}}$.

<u>Exercice 3</u> : Soit $f\in\mathcal{L}(\mathbb{K}^n,\mathbb{K}^n)$ on pose $g:\begin{cases} (\mathbb{K}^n)^2 & \to & \mathbb{K}^n \\ (x,y) & \mapsto & f(x)+f(y) \end{cases}$

1) Montrer que $g\in\mathcal{L}(\mathbb{K}^{2n},\mathbb{K}^n)$. **2)** Déterminer Im$(g)$ et rg(g) en fonction des éléments de f.
3) Calculer dim Ker(g) en fonction du rang de f.
4) On suppose que f est injective, donner une base de Ker(g) qu'on notera B.
5) Cas général : on suppose sue $(f_1,\dots,f_p)$ est une base de Ker(f). Donner une base de Ker(g).
6) Soit A la matrice de f dans la base canonique. Donner la matrice de g dans la base canonique en fonction de A.

. . . .

Réponses : **1)** On a $g((x,y)+\lambda(x',y'))=g(x+\lambda x',y+\lambda y')=f(x+\lambda x')+f(y+\lambda y')$
$=f(x)+\lambda f(x')+f(y)+\lambda f(y')=g(x,y)+\lambda g(x',y')$ Donc $\boxed{g \text{ est bien linéaire}}$.
2) On a $g(x,y)=f(x)+f(y)=f(x+y)\in\text{Im}(f)$ donc $\text{Im}(g)\subset\text{Im}(f)$. Réciproquement, si $y\in\text{Im}(f)$, alors $y=f(x)=f(x+0)=g(x,0)\in\text{Im}(g)$ donc $\boxed{\text{Im}(g)=\text{Im}(f)}$.
Ainsi $\text{rg}(g)=\dim\ (\text{Im}(g))=\dim\ (\text{Im}(f))=\text{rg}(f)$. Donc $\boxed{\text{rg}(g)=\text{rg}(f)}$.
3) D'après le théorème du rang, On a $\dim \text{Ker}g=\dim\mathbb{K}^{2n}-rg(g)=\boxed{2n-\text{rg}(f)}$.
4) Si f est injective, alors $g(x,y)=0 \iff f(x+y)=0 \iff x=-y$. On en déduit que $(x,y)=(x,-x)$ avec $x\in\mathbb{K}^n$, c'est à dire $x=\sum_{i=1}^n x_ie_i$ avec e_i les veceteurs de la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Donc $(x,y)=\left(\sum_{i=1}^n x_ie_i,-\sum_{i=1}^n x_ie_i\right)=\sum_{i=1}^n x_i(e_i,-e_i)$. Donc $\boxed{B=((e_1,-e_1),(e_2,-e_2),\dots,(e_n,-e_n))}$ est une base de Ker(g).
5) Déjà, on a $\dim\text{Ker}(g)=2n-\text{rg}f=2n-(n-p)=n+p$.
On a $g(x,y)=0 \iff f(x+y)=0 \iff x+y\in\text{Ker}(f) \iff x+y=\sum_{i=1}^n\lambda_if_i \iff y=-x+\sum_{i=1}^n\lambda_if_i$.
Ainsi : $(x,y)=(x,-x)+(0,\sum_{i=1}^n\lambda_if_i)=(x,-x)+\sum_{i=0}^n\lambda_i(0,f_i)$.
Avec $(x,-x)$ qui se décompose selon la base B de la question précédente. On pose donc $B'=((0,f_1),\dots,(0,f_p))$ qui contient p vecteurs, et alors $B\cup B'$ est génératrice de Ker(g). Comme elle autant de vecteurs que la dimension de Ker(g), c'est une base de Ker(g).
On obtient donc $\boxed{B\cup B'=((e_1,-e_1),(e_2,-e_2),\dots,(e_n,-e_n),(0,f_1),\dots,(0,f_p))}$ pour base de Ker(g).

6) On a $g(e_i,0)=f(e_i)$, donc la i^e colonne de $\text{Mat}_{B_c}(g)$ est la i^e colonne de A. De même, $g(0,e_i)=f(e_i)$, donc la $n+i^e$ colonne de $\text{Mat}_{B_c}(g)$ est la i^e colonne de A.
Cela donne la matrice par bloc suivante : $\boxed{\text{Mat}_{B_c}(g)=\begin{pmatrix}A & A\end{pmatrix}}$

Exercice 4 : On pose $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$. On pose $h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \to & \mathbb{K}^{2n} \\ x & \mapsto & (f(x), g(x)) \end{array} \right.$

1) Montrer que h est une application linéaire.

2) Exprimer Ker$h$ avec de Ker$f$ et Ker$g$ **3)** Exprimer rg(h) en fonction de rg(f) et rg(g).

4) Soient A et B sont respectivement les matrices de f et g dans la base canonique. Donner la matrice de h dans la base canonique en fonction de A et B.

. . . .

Réponses : **1)** On a $h(x+\lambda y) = (f(x+\lambda y), g(x+\lambda y)) = (f(x)+\lambda f(y), g(x)+\lambda g(y)) = (f(x), g(x)) + \lambda(f(y), g(y)) = h(x) + \lambda h(y)$ .Donc h est bien une application linéaire.

2) $x \in \text{Ker}h \iff h(x) = 0 \iff (f(x), g(x)) = (0,0) \iff f(x) = 0$ et $g(x) = 0 \iff x \in \text{Ker}f \cap \text{Ker}g$ donc $\boxed{\text{Ker}h = \text{Ker}f \cap \text{Ker}g}$

3) D'après le théorème du rang, on a rg$h = n - \dim \text{Ker}h = n - \dim \text{Ker}f \cap \text{Ker}g = n - (\dim \text{Ker}f +$

Exercice 5 : Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ non nulle. Calculer rg(f).

. . . .

Réponses : rg$f + \dim \text{Ker}f = \dim \mathbb{K} = 1$ donc rg$f = 1 - \dim \text{Ker}f \leq 1$ par ailleurs, comme c'est un nombre réel, on a rg$f = 0$ ou rg$f = 1$. Or rg$f = 0 \iff \text{Im}f = \{0\} \iff \forall x \in \mathbb{K}^n, f(x) = 0 \iff f = 0$.
Par hyptohèse, comme f est non nulle, on trouve $\boxed{\text{rg}f = 1}$.

Exercice 6 : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer que $\dim \text{Ker}(g \circ f) \leq \dim \text{Ker}g + \dim \text{Ker}f$.

. . . .

Réponses : Soit $B = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de Ker$f$, on a alors $\dim \text{Ker}f = p$. Alors B est une famille libre de Ker$(g \circ f)$, en effet, tous les vecteurs $e_i \in \text{Ker}(g \circ f)$ car $g \circ f(e_i) = g(0) = 0$.
On peut donc compléter B et $B' = (e_1, \ldots, e_p, a_1, \ldots, a_q)$ une base de Ker$(g \circ f)$ ainsi $\dim \text{Ker}(g \circ f) = p + q$.
Reste à montrer que $\dim \text{Ker}g \geq q$.

On va montrer que $(f(a_1), \ldots, f(a_q))$ est une famille libre de Ker(g). Déjà on a bien $f(a_i) \in \text{Ker}g$ car $a_i \in \text{Ker}g \circ f$ donne $g(f(a_i)) = 0$.
Maintenant, supposons $\displaystyle\sum_{i=1}^{q} \lambda_i f(a_i) = 0$, alors $f\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{q} \lambda_i f(a_i)\right) = 0$ donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{q} \lambda_i f(a_i) \in \text{Ker}(f)$. Donc a_i se décompose sur la base B et cela donnerait une relation de liaison. Ainsi, $\displaystyle\sum_{i=1}^{q} \lambda_i f(a_i) = \sum_{i=1}^{p} \mu_i e_i$. Or, comme B' est une base, on trouve que tous les scalaires sont nuls, ainsi $\lambda_1 = \ldots = \lambda_q = \mu_1 = \ldots = \mu_p = 0$. En conséquence, $(f(a_1), \ldots, f(a_q))$ est une famille libre de Ker(g). On trouve donc $q \leq \dim \text{Ker}g$

D'où $\boxed{\dim \text{Ker}(g \circ f) \leq \dim \text{Ker}g + \dim \text{Ker}f.}$

Exercice 7 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ une application linéaire telle que Ker$(f \circ f) = \text{Ker}f$.
Montrer que Im$(f \circ f) = \text{Im}f$

. . . .

Réponses : On a Im$f \circ f \subset \text{Im}f$ car si $y \in \text{Im}(f \circ f)$, on a $y = f \circ f(x) = f(f(x)) \in \text{Im}f$.
Par ailleurs, d'après le théorème du rang, on a
$\dim \text{Im}f \circ f = \text{rg}(f \circ f) = \dim E - \dim \text{Ker}(f \circ f) = \dim E - \dim \text{Ker}f = \text{rg}f = \dim \text{Im}f$.
Donc on a inclusion, puis égalité des dimensions, cela donne $\boxed{\text{Im}(f \circ f) = \text{Im}f}$.

Exercice 8 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f \circ f = f + \text{id}_E$. Montrer que f est un isomorphisme.

. . . .

Réponses : On a $f \circ f - f = \mathrm{id}_E$. Or $f \circ f - f = f \circ (f - \mathrm{id}_E) = (f - \mathrm{id}_E) \circ f = \mathrm{id}_E$. On en déduit que f est bijective, de réciproque $f^{-1} = f - \mathrm{id}_E$. L'application linéaire f est donc une bijective d'inverse $f - \mathrm{id}_E$. $\boxed{f \text{ est donc un isomorphisme.}}$

Exercice 9 : Soit E un espace vectoriel avec $\dim E = n$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ une application nilpotente d'indice n, c'est à dire :

$$\exists n \in \mathbb{N} \mid f^n = 0 \text{ et } f^{n-1} \neq 0$$

1) Montrer que f n'est pas inversible.
2) Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $B = (x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ est une base de E
3) En déduire le rang de f. **4)** Donner une base de $\mathrm{Ker} f$. **5)** Donner la matrice de f dans la base B.

. . . .

Réponses : **1)** Si f est inversible, alors $f \circ f$ est inversible par composition de fonctions inversible. Pareil pour $f \circ f \circ f = f^3$... Par récurrence immédiate, on a f^n qui est inversible. C'est impossible car $f^n = 0$. On en déduit $\boxed{f \text{ non inversible}}$.

2) Comme $f \neq 0$, on prend $x \notin \mathrm{Ker} f^{n-1}$. On a alors $(x, f(x), \ldots, f(x)^{n-1})$ est une famille libre : Supposons $\lambda_1 x + \lambda_2 f(x) + \ldots + \lambda_n f^{n-1}(x) = 0$. Alors en composant par f^{n-1}, on trouve $\lambda_1 f^{n-1}(x) + \lambda_2 f^n(x) + \ldots + \lambda_n f^{2n-1}(x) = \lambda_1 f^{n-1}(x) + 0 = 0$. Donc $\lambda_1 = 0$ car $f^{n-1}(x) \neq 0$.
On a donc $\lambda_2 f(x) + \ldots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(x) = 0$. On peut alors composer par f^{n-2} pour trouver $\lambda_2 = 0$ etc... En réitérant le procédé n fois, par récurrence immédiate nous trouvons $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$. C'est donc bien une famille libre.
On a n vecteurs dans cette famille, c'est donc une base de E.

3) On a $\mathrm{Vect}(f(x), \ldots, f(x)^{n-1}) \subset \mathrm{Im} f$, donc $\mathrm{rg} f \geq n-1$ et comme $\mathrm{Im} f \subset E$, on a aussi $\mathrm{rg} f \leq n$. Donc $\mathrm{rg} f = n$ ou $\mathrm{rg} f = n-1$. Si on avait $\mathrm{rg} f = n = \dim E$, f serait alors un isomorphisme. C'est impossible d'après la question 1), donc $\boxed{\mathrm{rg} f = n-1}$ est la seule possibilité.

4) $\mathrm{Mat}_B(f) = \mathrm{Mat}_B(f(x), f^2(x), \ldots, f^n(x)) = \begin{pmatrix} 0 \cdots 0 & 0 \\ I_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 10 : Soit $f \in \mathcal{L}(E, E)$ une application linéaire. **1)** Justifier que $f^n \in \mathcal{L}(E, E)$.
2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Ker} f^{n-1} \subset \mathrm{Ker} f^n$.
3) En déduire que les suites $(\mathrm{rg}\ f^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\dim \mathrm{Ker} f^n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent.
4) Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Ker}(f^p) = \mathrm{Ker}(f^{p+1})$.
5) Montrer que $\forall n \geq p$, $\mathrm{Ker}(f^n) = \mathrm{Ker}(f^p)$ et $\mathrm{Im}(f^n) = \mathrm{Im}(f^p)$
6) On pose $p_0 = \min\limits_{p \in \mathbb{N}} \{p \in \mathbb{N} \mid \mathrm{Ker}(f^p) = \mathrm{Ker}(f^{p+1})\}$:
. **6.a)** Justifier l'existence de p_0 . **6.b)** Si f est un isomorphisme, calculer p_0.
. **6.c)** Si f est un projecteur, calculer p_0. . **6.d)** Soit $f : (x, y, z) \to (0, x, y)$ calculer p_0 pour f
. **6.e)** Pour f quelconque, montrer que $p_0 \leq \mathrm{rg} f + 1$

. . . .

Réponses : **1)** La composée d'application linéaire est une application linéaire, donc le résultat s'obtient par récurrence immédiate.

2) On a $x \in \mathrm{Ker}(f^{n-1}) \implies f^{n-1}(x) = 0 \implies f(f^{n-1}(x)) = 0 \implies f^n(x) = 0$ Donc cela donne bien $\boxed{\mathrm{Ker} f^{n-1} \subset \mathrm{Ker} f^n}$

3) $(\dim \mathrm{Ker} f^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. En effet, d'après la question précédente, on a :
$\forall n \in \mathbb{N}$, $\dim \mathrm{Ker} f^{n-1} \leq \dim \mathrm{Ker} f^n$. Par ailleurs elle est majorée par $\dim E$. On en déduit qu'elle converge. Par ailleurs, d'après le théorème du rang, $\mathrm{rg} f^n = \dim E - \dim \mathrm{Ker} f^n$ donc si la suite des $(\dim \mathrm{Ker} f^n)$ converge, alors la suite des $(\mathrm{rg} f^n)$ converge aussi par opération sur les limites.

4) La suite $(\dim \mathrm{Ker} f^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et croissante. Par l'absurde, supposons que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\dim \mathrm{Ker} f^{p+1} > \dim \mathrm{Ker} f^p$ alors on a $\forall p \in \mathbb{N}, \dim \mathrm{Ker} f^{p+1} \geq 1 + \dim \mathrm{Ker} f^p$ et de même $\dim \mathrm{Ker} f^p \geq 1 + \dim \mathrm{Ker} f^{p-1}$

par récurrence immédiate, on a $\forall p \in \mathbb{N}, \mathrm{Ker} f^{p+1} \geq p + \dim \mathrm{Ker} f$. Pour $p > \dim E$, cela est contradictoire car on trouve $\mathrm{Ker} f^{p+1} > \dim E$.
On en déduit qu'il existe $\boxed{p \in \mathbb{N} \mid \mathrm{Ker}(f^p) = \mathrm{Ker}(f^{p+1})}$.

5) On montre que $\mathrm{Ker} f^{n+1} = \mathrm{Ker} f^n \implies \mathrm{Ker} f^{n+2} = \mathrm{Ker} f^{n+1}$. On a déjà $\mathrm{Ker} f^{n+1} \subset \mathrm{Ker} f^{n+2}$. d'apèrs la question 2) Il faut donc montrer l'autre inclusion. Soit $x \in \mathrm{Ker} f^{n+2}$, alors $f^{n+2}(x) = 0 = f^{n+1}(f(x))$ donc $f(x) \in \mathrm{Ker} f^{n+1} = \mathrm{Ker} f^n$ donc $f(x) \in \mathrm{Ker} f^n$ et $f^n(f(x)) = f^{n+1}(x) = 0$. donc $x \in \mathrm{Ker} f^{n+2}$.
Ainsi $\mathrm{Ker} f^{p+1} = \mathrm{Ker} f^p \implies \mathrm{Ker} f^{p+2} = \mathrm{Ker} f^{p+1} = \mathrm{Ker} f^p \implies \mathrm{Ker} f^{p+3} = \mathrm{Ker} f^p \implies \ldots \implies \mathrm{Ker} f^n = \mathrm{Ker} f^p$ pour tout $n \geq p$ par récurrence immédiate.

6) a) L'ensemble $\{p \in \mathbb{N} \mid \mathrm{Ker}(f^p) = \mathrm{Ker}(f^{p+1})\}$ est non vide d'après la question 4). Par ailleurs, il est minoré par 0 donc il admet une borne inférieure. Comme c'est un ensemble de nombres entiers, la borne inférieure est forcément un minimum. (On pourrait démontrer ce résultat par l'absurde, en supposant que l'ensemble n'admet pas de minimum et montrer que c'est impossible.)
$\boxed{\text{Donc } p_0 \text{ existe}}$.

. **6.b)** Si f est un isomorphisme $\iff \mathrm{Ker} f = \{0\} \iff \mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_E) \iff \mathrm{Ker} f^1 = \mathrm{Ker} f^0$. On en déduit $\boxed{p_0 = 0}$.

. **6.c)** Déjà, si on a $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^0$ si f est un isomorphisme. Pour un projecteur, cela veut dire $f = \mathrm{id}_E$, on a $p_0 = 0$. Sinon, on a $f \circ f = f$ donc $\mathrm{Ker} f^2 = \mathrm{Ker} f$. On en déduit $\boxed{p_0 = 1}$.

. **6.d)** On a $\mathrm{Ker} f^0 = \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_E) = \{0\}$ et $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Vect}((0,0,1))$. On a $f \circ f(x,y,z) = f(0,x,y) = (0,0,x)$ donc $\mathrm{Ker} f^2 = \mathrm{Vect}((0,1,0),(0,0,1))$. Enfin, $f^3 = 0$ donc $\mathrm{Ker} f^3 = \mathbb{R}^3$. On en déduit $\mathrm{Ker} f^4 = \mathrm{Ker} f^3 = \mathbb{R}^3$ et $\boxed{p_0 = 3}$.

. **6.e)** D'après les questions 3), 4) et 5), la suite $(\dim \mathrm{Ker} f)$ est croissante strictement, jusqu'à être stationnaire à partir du rang $n = p_0$. On en déduit : $\dim \mathrm{Ker} f^{p_0} > \dim \mathrm{Ker} f^{p_0 - 1} > \ldots > \dim \mathrm{Ker} f$.
Comme ce sont des nombres entiers, on a donc : $\dim \mathrm{Ker} f^{p_0} \geq 1 + \dim \mathrm{Ker} f^{p_0-1} \geq 2 + \dim \mathrm{Ker} f^{p_0-2} \geq \ldots \geq p_0 - 1 + \dim \mathrm{Ker} f$.
Donc $p_0 \leq \dim \mathrm{Ker} f^{p_0} - \dim \mathrm{Ker} f + 1 \leq \dim E - (\dim E - \mathrm{rg} f) + 1 = 1 + \mathrm{rg} f$.
On trouve bien $\boxed{p_0 \leq \mathrm{rg} f + 1}$

$\boxed{\text{Matrices}}$

Exercice 11 : *(en 1 minute)* Donner une base pour l'image et le noyau de A puis dire si la matrice est inversible ou non.

1) $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ **2)** $\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ **3)** $\begin{pmatrix}5&3&-1&1\end{pmatrix}$ **4)** $\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\\1&1\end{pmatrix}$ **5)** $\begin{pmatrix}1&1&1\\2&4&-1\end{pmatrix}$ **6)** $\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$

. . . .

Réponses : **1)** $\mathrm{Ker}M = \{0\}$ et $\mathrm{Im}M = \mathbb{R}^2$ M est inversible. **2)** $\mathrm{Ker}M = \{0\}$ et $\mathrm{Im}M = \mathrm{Vect}((1,-2,1))$
3) $\mathrm{Ker}M = \mathrm{Vect}((1,0,5,0),(0,1,3,0),(0,0,1,1))$ et $\mathrm{Im}M = \mathbb{R}$
4) $\mathrm{Ker}M = \mathrm{Vect}((1,-1))$ et $\mathrm{Im}M = \mathrm{Vect}((1,-1,1))$. **5)** $\mathrm{Ker}M = \mathrm{Vect}((-5,3,2))$ et $\mathrm{Im}M = \mathrm{Vect}((1,-1,1))$
6) $\mathrm{Ker}M = \mathrm{Vect}((1,0,-1))$ et $\mathrm{Im}M = \mathrm{Vect}((1,0,1),(0,1,0))$ et M n'est pas inversible.

Exercice 12 : Donner une base pour l'image et le noyau de A puis dire si la matrice est inversible..

1) $\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&2&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ **2)** $\begin{pmatrix}1&2\\1&5\\1&0\\4&3\end{pmatrix}$ **3)** $\begin{pmatrix}5&3&-1&1\\3&5&-1&1\\3&0&0&1\end{pmatrix}$ **4)** $\begin{pmatrix}5&-15&10\\25&20&-5\\10&10&5\end{pmatrix}$ **5)** $\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&-1\\0&1&0&1\\1&0&0&1\end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix}2&1&-1&2\\1&0&2&3\\1&0&0&1\\1&1&-1&1\end{pmatrix}$ **7)** $\begin{pmatrix}1&0&1&0&1\\0&1&0&1&0\\1&0&1&0&1\\0&1&0&1&0\\1&0&1&0&1\end{pmatrix}$ **8)** $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\6&7&8&9&10\\11&12&13&14&15\\16&17&18&19&20\\21&22&23&24&25\end{pmatrix}$

. . . .

Réponses : **1)** $\mathrm{rg}M = \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&2&1\\1&1&1\end{pmatrix} = \mathrm{rgrg}\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&-4&4\\0&-1&2\end{pmatrix} = 3$ Donc $\boxed{M \text{ est inversible}}$.

On a donc $\boxed{\mathrm{Im}M = \mathbb{R}^3 \text{ et } \mathrm{Ker}M = \{0\}}$.

2) On a $\boxed{\mathrm{Im}M = \mathrm{Vect}((1,1,1,4),(2,5,0,3))}$ qui forme une base car les colonnes sont non colinéaires et $\boxed{\mathrm{Ker}M = \{0\}}$ d'après le théorème du rang car $\dim \mathrm{Ker}M = \dim \mathbb{R}^2 - \mathrm{rg}M = 2-2 = 0$.

3) On a $\mathrm{rg}M = \mathrm{rg}\begin{pmatrix}5&3&-1&1\\3&5&-1&1\\3&0&0&1\end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix}-1&5&3&1\\-1&3&5&1\\0&3&0&1\end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix}-1&5&3&1\\0&-2&2&0\\0&3&0&1\end{pmatrix} = 3$ Donc $\boxed{\mathrm{Im}M = \mathbb{R}^3}$.
Par théorème du rang, on a donc $\dim \mathrm{Ker}M = \dim \mathbb{R}^4 - \mathrm{rg}M = 4-3 = 1$. Pour le calculer, on peut résoudre le système, ou trouver une relation liant les colonnes de M : $3C_4 - C_1 - C_2 - 5C_3 = 0$. On a donc $\boxed{\mathrm{Ker}M = \mathrm{Vect}((1,2,5,-3))}$.

4) $M = 5A$ avec $A = \begin{pmatrix}1&-3&2\\5&4&-1\\2&2&1\end{pmatrix}$ et on a $\mathrm{Im}A = \mathrm{Im}M$ ainsi que $\mathrm{Ker}A = \mathrm{Ker}M$ donc étudions A. :
$\mathrm{rg}A = \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&-3&2\\5&4&-1\\2&2&1\end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&-3&2\\0&19&-11\\0&8&-3\end{pmatrix} = 3$ Donc $\boxed{A \text{ est inversible et } M \text{ aussi}}$ et on trouve : $\boxed{\mathrm{Ker}M = \{0\} \text{ et } \mathrm{Im}M = \mathbb{R}^3}$

5) $\mathrm{rg}M = \mathrm{rg}\begin{pmatrix}2&1&-1&2\\1&0&2&3\\1&0&0&1\\1&1&-1&1\end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&2&-1&2\\0&1&2&3\\0&1&0&1\\1&1&-1&1\end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&2&-1&2\\0&1&2&3\\0&1&0&1\\0&-1&0&-1\end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&2&-1&2\\0&1&0&1\\0&0&2&2\\0&0&0&0\end{pmatrix} = 3$
Donc M n'est pas inversible. On a $\boxed{\mathrm{Im}M = \mathrm{Vect}((2,1,1,1),(1,0,0,1),(-1,2,0,-1))}$
et comme $C_1 + C_2 + C_3 - C_4 = 0$, on a $\boxed{\mathrm{Ker}M = \mathrm{Vect}((1,1,1,-1))}$
6) On a clairement $\mathrm{rg}M = 2$ ainsi $\boxed{\mathrm{Im}M = \mathrm{Vect}((1,0,1,0,1),(0,1,0,1,0))}$ et comme $C_1 - C_3 = C_1 - C_5 =$

$C_2-C_4=0$, on a $\boxed{\mathrm{Ker}M=\mathrm{Vect}((1,0,-1,0,0),(1,0,0,0,-1),(0,1,0,-1,0))}$

7) $\mathrm{rg}^tM=\mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&6&11&16&21\\2&7&12&17&22\\3&8&13&18&23\\4&9&14&19&24\\5&10&15&20&25\end{pmatrix}=\mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&6&11&16&21\\1&1&1&1&1\\2&2&2&2&2\\3&3&3&3&3\\4&4&4&4&4\end{pmatrix}=2$. Donc $\boxed{\mathrm{Im}M=\mathrm{Vect}((1,6,11,16,21),(2,7,12,17,22))}$

(On a fait $L_2\leftarrow L_2-L_1$ et $L_3\leftarrow L_3-L_1,\dots,L_5\leftarrow L_5-L_1$.)
Par ailleurs, $C_2-C_1=C_3-C_2=C_4-C_3=C_5-C_4$ Donc on trouve les relations suivantes :
$2C_2-C_1-C_3=0=C_2-C_1-C_4+C_3=C_2-C_1-C_5+C_4$
Donc $\boxed{\mathrm{Ker}M=\mathrm{Vect}((-1,2,-1,0,0),(-1,1,1,-1,0),(-1,1,0,1,-1))}$ C'est bien une base car la famille est échelonnée (coordonnée 5 et coordonnée 4).

<u>Exercice 13</u> : Calculer l'image et le noyau de $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ puis dire si la matrice est inversible ou non. (On pourra noter $(e_1,\dots,e_n)$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$).

1) $\begin{pmatrix}1&1&\dots&\dots&1\\0&1&&&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&&\vdots\\\vdots&&\ddots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&\cdots&0&1\end{pmatrix}$ **2)** $\begin{pmatrix}1&0&\dots&0&1\\1&1&\ddots&\vdots&\vdots\\\vdots&0&\ddots&0&\vdots\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\1&0&\cdots&0&1\end{pmatrix}$ **3)** $J=\begin{pmatrix}1&\dots&1\\\vdots&&\vdots\\1&\dots&1\end{pmatrix}$ **4)** $J-I_n$

5) $\begin{pmatrix}1&2&3&\dots&n\\n+1&n+2&n+3&\dots&2n\\2n+1&2n+2&3n+3&\dots&3n\\\vdots&&&&\vdots\\(n-1)n+1&(n-1)n+2&(n-1)n+3&\dots&n^2\end{pmatrix}$ **6)** $\begin{pmatrix}1&1&\dots&1&1\\-1&-1&\dots&-1&-1\\1&1&\dots&1&1\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\(-1)^{n+1}&(-1)^{n+1}&\cdots&(-1)^{n+1}&(-1)^{n+1}\end{pmatrix}$

....

Réponses : **1)** On a une matrice échelonnée donc $\mathrm{rg}A=n$ donc A est inversible et $\boxed{\mathrm{Im}A=\mathbb{R}^n \text{ et } \mathrm{Ker}A=\{0\}}$.

Changement de base

<u>Exercice 14</u> : soit $f:(x,y)\mapsto(x+y,x-y)$ et $g:(x,y)\mapsto(x+2y,y)$
1) Donner la matrice de f et g dans la base canonique.
2) Calculer la matrice de f et g dans la base $B=((1,1),(1,-1))$.

....

Réponses : **1)** On note $A=\boxed{\mathrm{Mat}_{B_c}(f)=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}}$. On note $C=\boxed{\mathrm{Mat}_{B_c}(g)=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}}$

2) On a $\mathrm{Mat}_{B_c}(B)=A$ et donc $\mathrm{Mat}_B(f)=\mathrm{Mat}_B(B_c)\mathrm{Mat}_{B_c}(f)\mathrm{Mat}_{B_c}(B)=A^{-1}AA=A$. Donc $\boxed{\mathrm{Mat}_{B_c}(f)=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}}$.

Pour g, il faut calculer A^{-1}. D'après la formuler pour inverser les matrices 2 x 2, on a :
$A^{-1}=\dfrac{1}{-2}\begin{pmatrix}-1&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$.

Donc en faisant le calcul :$\mathrm{Mat}_B(g)=\mathrm{Mat}_B(B_c)\mathrm{Mat}_{B_c}(g)\mathrm{Mat}_{B_c}(B)=A^{-1}\mathrm{Mat}_{B_c}(g)A=\boxed{\begin{pmatrix}2&-1\\1&0\end{pmatrix}}$.

<u>Exercice 15</u> : soit f une application linéaire telle que $\mathrm{Mat}_B(f)=\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&2&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ avec $B=((1,1,1),(1,-1,2),(1,0,1))$.

Calculer $f(x,y,z)$, pour $x,y,z\in\mathbb{R}^3$

....

Réponses :

Exercice 16 : Soit $f:(x,y,z,t)\to(x+y,x-z,x+t,y+z+t)$ **1)** Montrer que $f\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$.
2) Montrer que $B=\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathbb{R}^4$. **3)** Calculer $\mathrm{Mat}_B(f)$.

....

Réponses : **1)** Facile, montrer que $f(x,y,z,t)+\lambda f(x',y',z',t')=f(x+\lambda x',y+\lambda y',z+\lambda z',t+\lambda t')$
2) B est génératrice de $\mathbb{R}^4$ car :
$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\in\mathrm{Vect}(B)$, $\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\in\mathrm{Vect}(B)$
$\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\in\mathrm{Vect}(B)$ et $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\in\mathrm{Vect}(B)$
Par ailleurs, elle contient 4 vecteurs, donc c'est bien une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 17 : On pose $f:(x,y,z)\mapsto(x+y+z,2y+z,z)$
1) Montrer que $E=\{v\in\mathbb{R}^3 \mid f(v)=v\}$ est un espace vectoriel.
2) Montrer que $\dim E=2$ et trouver $B=(e_1,e_2)$ une base de E.
3) Montrer qu'il existe $\lambda\neq 1$ et $e_3\in\mathbb{R}^3$ non nul tel que $f(e_3)=\lambda e_3$. On explicitera λ et e_3.
4) Montrer que $B=(e_1,e_2,e_3)$ est une base de E.
5) Donner la matrice de f dans cette base. En déduire la matrice de f^n.

....

Réponses : **1)** On peut utiliser la définition des espaces vectoriels, mais je vais faire plus rapide :
$E=\{v\in\mathbb{R}^3\mid f(v)-v=0\}=\{v\in\mathbb{R}^3\mid (f-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})(v)=0\}=$ $\boxed{\mathrm{Ker}(f-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})\text{ c'est donc un espace vectoriel}}$
car $f-\mathrm{id}$ et bien une application linéaire (par somme d'applications linéaires).
2) On veut une base de $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ On écrit donc $A=\mathrm{Mat}_{B_c}(f-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}-I_3=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$.
On a $\mathrm{rg}(f-\mathrm{id})=1$ donc $\dim\mathrm{Ker}(f-\mathrm{id})=$ $\boxed{\dim E=2}$ par théorème du rang.
Par ailleurs Comme on a $C_1=0$ et $C_2-C_3=0$ sur la matrice ci dessus, on en déduit $\boxed{E=\mathrm{Vect}((1,0,0),(0,1,-1))}$
Donc $e_1=(1,0,0)$ et $e_2=(0,1,-1)$
3) On pose $e_3=(x,y,z)$. On résout alors $f(e_3)=\lambda e_3$ c'est à dire $(f-\lambda\mathrm{id})(e_3)=0$. Cela revient à chercher le noyau de $A_\lambda=\mathrm{Mat}_{B_c}(f-\lambda\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})=\begin{pmatrix}1-\lambda&1&1\\0&2-\lambda&1\\0&0&1-\lambda\end{pmatrix}$ Or cette matrice est échelonnée et de rang 3 si et seulement si $\lambda-1\neq0$ et $\lambda-2\neq0\iff\lambda\notin\{1,2\}$.
Si la matrice est inversible, alors $e_3=0$ est la seule solution. On en déduit que comme $\lambda\neq1$ par hypothèse, le seul λ restant est $\boxed{\lambda=2}$ pour que la matrice soit non inversible.
On a alors $A_2=\mathrm{Mat}_{B_c}(f-2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})=\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&0&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$ clairement de rang 2. Par ailleurs $\mathrm{Ker}A_2=\mathrm{Vect}((1,1,0))$
on en déduit $\boxed{e_3=(1,1,0).}$ On a $\boxed{f(1,1,0)=2\cdot(1,1,0)}$.
4) On vérifie que la famille est libre : $\mathrm{rg}(e_1,e_{2,e}3)=\mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&-1&0\end{pmatrix}=\mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}=3$, la famille est échelonné donc elle est bien libre. $\boxed{B\text{ est une base de }\mathbb{R}^3}$.

5) On a $f(e_1) = e_1$, $f(e_2) = e_2$ et $f(e_3) = 2e_3$, ainsi $\boxed{\mathrm{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$ et $\boxed{\mathrm{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}}$

6) Formule du changement de base..
