Minoration, majoration, encadrement

Exercice 1
Étant donnés trois nombres réels $x \in [2,3[$, $y \in]4,10]$, $z \in]-4,-2[$, déterminer, si possible, un encadrement des expressions suivantes :
$x-y$, $z(x+y)$, $\frac{1}{x+y+z}$, $\frac{x}{y+z}$, $(x+z)^2 - e^{\frac{x}{z}}$, $\ln(|x+z|)$.

Exercice 2
Moyennes arithmétique, géométrique, harmonique et quadratique.
Soient x et y deux réels strictement positifs tels que $x<y$. On pose
$a = \dfrac{x+y}{2}$, $\quad g = \sqrt{xy}$, $\quad h = \dfrac{2xy}{x+y}$, $\quad q = \sqrt{\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)}$.
Montrer que $x<h<g<a<q<y$. Que peut-on dire de tous ces nombres si $x=y$?

Inégalité triangulaire

Exercice 3
1. Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\big||x|-|y|\big| \leqslant |x+y|$.
2. On suppose $2 \leqslant |a| \leqslant 4$ et $5 \leqslant |b| \leqslant 6$. Utiliser l'inégalité de la question précédente et l'inégalité triangulaire du cours pour encadrer $\dfrac{a^2|b+1|}{|a+2b|}$.

Équations et inéquations

Exercice 4 (Équations)
Résoudre les équations d'inconnue réelle x suivantes :
$-x^2+3x=2$; $\ln x + \ln(2x-e) = 2$; $|x+4|+|2x-1|-|x+1| = 0$; $x+\sqrt{3x-1} = 1$; $x^4 - x^2 - 1 = 0$; $e^{x-2}+e^{2-x} = a$; $|3x-2| = |5-x|$; $x-2 = \sqrt{x}$; $|x^2-3x+2| = x$.

Exercice 5 (Inéquations)
Dans cet exercice, on demande d'utiliser les règles de calcul algébriques sur les inégalités et non d'étudier les variations d'une fonction. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :
$|x-3|+|x+4| \leqslant 7$; $\ln(2x+1) < \ln(4-2x)$; $\ln(x^2) > 1$; $2\ln x > 1$; $(\ln x)^2 > 1$; $\sqrt{x+1} \geqslant \sqrt{4x-1}$; $|x-1| \geqslant |4x+1|$; $\sqrt{3x^2-3x} \geqslant \left|\frac{3x}{2}-1\right|$; $\sqrt{3x^2-3x} \geqslant \frac{3x}{2}-1$; $x+\sqrt{x^2-5x+4} < 2$; $(\ln x)^2 - 3(\ln x) + 1 > 0$.

Exercice 6 (Système d'inéquations)
Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système d'inéquations $\left\{\begin{array}{rcl} |x+1| & < & \frac{5}{2} \\ \sqrt{x^2+x-2} & > & 1+\frac{x}{2} \end{array}\right.$

Partie entière

Exercice 7
Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left\lfloor \dfrac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{x+1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.
Indication : on pourra poser $n = \lfloor x \rfloor$ et discuter suivant la parité de n.

Exercice 8
1. Représenter la fonction $f : x \longmapsto x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ sur l'ensemble $\left]-\infty, -\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{3}, +\infty\right[$.
2. Démontrer que l'ensemble $E = \left\{f(x),\ x \in \mathbb{R}_+^*\right\}$ est borné.
   En déduire $\max(E)$, $\sup(E)$, $\min(E)$, $\inf(E)$.

Bornes supérieure et inférieure, maximum et minimum

Exercice 9 (Bornes supérieure et inférieure, plus petit et plus grand élément)
Déterminer, lorsqu'ils existent, les bornes supérieures et inférieures ainsi que les plus petits et plus grands éléments des ensembles suivants :
$A =]\sqrt{2}, \pi[$; $B =]-\infty, 5]$; $C = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$, $D = \left\{(-1)^n \cos\left(\frac{1}{n}\right),\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$,
$E = \left\{\sin(x),\ x \in \left]0, \frac{3\pi}{4}\right]\right\}$, $F = \left\{\ln(x),\ x \in]0, +\infty[\right\}$.
Pour les ensembles C et D, on commencera par représenter graphiquement les éléments correspondant à $n = 1,2,3,4,5,6$ puis on conjecturera la valeur des nombres cherchés et enfin, on prouvera ces conjectures.

Quelques sommes

Exercice 10
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = n$.

Démontrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x_i - 1)^2 = 0$. Qu'en déduit-on pour les nombres x_i ?

Exercice 11
1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$.
2. Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, on a :
   $(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \cdots + \dfrac{1}{x_n}\right) \geqslant n^2$.

Exercice 12 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)
On considère $2n$ réels $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$.

1. Montrer que $\sum\limits_{k=1}^{n} (a_k + b_k x)^2$ est un trinôme du 2^{nd} degré dont on déterminera les coefficients de x^2 et de x ainsi que le terme constant.
2. Déterminer le signe de ce polynôme. En déduire le signe de son discriminant.
3. Établir l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant \left(\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} (a_k)^2}\right)\left(\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} (b_k)^2}\right)$, ainsi que l'inégalité : $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (a_i)^2} + \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (b_i)^2}$.