Mathématiques

Lycée THIERS
Année 23-24

Devoir surveillé n° 1

1BCPST 2

23 septembre 2023
Durée : 3h

Qualité de la rédaction, clarté des raisonnements, présentation, orthographe et ponctuation font partie des critères de notation. Il est vivement recommandé de lire attentivement les questions et d'*encadrer les résultats*. L'usage des calculatrices est ***interdit***.

Exercice 1. *Logique propositionnelle et ensembles*

1. On considère la proposition $\mathcal{A}$: $\exists n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, n \geqslant p$.
   (a) Écrire la négation de $\mathcal{A}$ avec des symboles mathématiques.
   (b) L'assertion $\mathcal{A}$ est-elle vraie ou fausse ? On justifiera sa réponse.
2. Soit A et B deux parties d'un ensemble E. On note $A\Delta B$ l'ensemble $(A \cup B) \cap \overline{A \cap B}$.
   Démontrer que $A\Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$.

Exercice 2. *Quelques calculs*

1. Simplifier le plus possible les expressions suivantes :

$$A = 2^{2n-1} - 2^{n+1}\left(2^{n-1} + 2^{n+1}\right) \qquad B = \frac{\dfrac{1-x}{\sqrt{x}}}{1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}} \qquad C = \frac{3+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$$

2. Factoriser $D = \dfrac{n^2+n}{2} - \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2 + \dfrac{n(n+1)(2n-1)}{6}$.
3. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\sqrt{2-x}}{\ln(x^2-1)}$.

Exercice 3. *Équation, inéquation et encadrement*

Résoudre les équations et inéquations suivantes là où elles sont définies :

1. $(E)\quad x + \dfrac{15}{x} = 8$
2. $(E)\quad 1 - x + \sqrt{3-x} = 0$
3. $(E)\quad |x+1| = |3x-4|$
4. $(E)\quad \dfrac{1}{x+2} < 1$
5. $(E)\quad \ln(x+3) + \ln(x-1) \leqslant 2\ln(\sqrt{3})$

Exercice 4. *Encadrement*

Sachant que $2 < e < 3$, donner un encadrement de $A = \dfrac{e^2-2}{2e+1}$ et de $B = \dfrac{1}{\sqrt{4-e}}$.

Exercice 5. *Récurrences*

1. Soit $x > 0$. Montrer que $\forall n \in [\![2, +\infty[\![,\ (1+x)^n > 1 + nx$.
2. On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
   Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant 2^n$.
3. On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 0,\ u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$.
   (a) Calculer u_2, u_3.
   (b) Conjecturer la valeur de u_n.
   (c) Démontrer cette conjecture par récurrence.

Exercice 6. *Étude de fonction*

On considère la fonction définie par $f(x) = x - 2\ln(1+e^x)$.

On note C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) < x$ et $f(x) < -x$.
   (b) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) < 0$.
3. (a) On admettra sans le justifier que f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$. Calculer sa dérivée f'.
   On rappelle que $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$ lorsque u est une fonction dérivable à valeurs strictement positives.
   (b) Déterminer les variations de f.
4. Tracer les droites d'équation $y = x$ et $y = -x$ ainsi que l'allure de la courbe représentative de f, en exploitant les questions précédentes.