Lycée THIERS
Année 23-24

Mathématiques

1BCPST 2

Devoir surveillé n° 1

23 septembre 2023
Durée : 3h

Qualité de la rédaction, clarté des raisonnements, présentation, orthographe et ponctuation font partie des critères de notation.
Il est vivement recommandé de lire attentivement les questions et d'*encadrer les résultats*. L'usage des calculatrices est ***interdit***.

Exercice 1. *Logique propositionnelle et ensembles*

1. (a) $\boxed{\text{non}(\mathcal{A}) \text{ est l'assertion } \forall n \in \mathbb{N},\ \exists p \in \mathbb{N},\ n < p.}$

   (b) Démontrons non($\mathcal{A}$).

   Soit $n \in \mathbb{N}$. On remarque que $n+1 \in \mathbb{N}$ et que $n < n+1$ donc l'assertion $\exists p \in \mathbb{N},\ n < p$ est vraie.

   Le nombre n est quelconque dans $\mathbb{N}$ donc on vient de démontrer $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists p \in \mathbb{N},\ n < p$ autrement dit non($\mathcal{A}$).

   non($\mathcal{A}$) étant vraie, on en déduit que $\boxed{\mathcal{A} \text{ est fausse.}}$

2. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

   Par report,

   $$\begin{aligned} A\Delta B &= (A \cup B) \cap \left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) \\ &= \left(A \cap \left(\overline{A} \cup \overline{B}\right)\right) \cup \left(B \cap \left(\overline{A} \cup \overline{B}\right)\right) \text{ simplifions les deux termes de cette réunion} \end{aligned}$$

   $A \cap \left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) = (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) = \emptyset \cup (A \cap \overline{B}) = A \cap \overline{B}$

   $B \cap \left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) = (B \cap \overline{A}) \cup (B \cap \overline{B}) = (B \cap \overline{A}) \cup \emptyset = B \cap \overline{A}$

   Par report,

   $\boxed{A\Delta B = \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(B \cap \overline{A}\right)}$

Exercice 2. *Quelques calculs*

1.

$$\begin{aligned} A &= 2^{2n-1} - 2^{n+1}\left(2^{n-1} + 2^{n+1}\right) \\ &= 2^{2n-1} - 2^{2n} - 2^{2n+2} \\ &= 2^{2n-1}\left(1 - 2 - 2^3\right) \end{aligned}$$

$\boxed{A = -9 \times 2^{2n-1}}$

$$\begin{aligned} C &= \frac{3+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \\ &= \frac{(3+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} \\ &= \frac{6+3\sqrt{3}+2\sqrt{3}+3}{4-3} \end{aligned}$$

$\boxed{C = 9 + 5\sqrt{3}}$

$$\begin{aligned} B &= \frac{\frac{1-x}{\sqrt{x}}}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} \\ &= \frac{\frac{1-x}{\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}} \\ &= \frac{1-x}{\cancel{\sqrt{x}}} \times \frac{\cancel{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}+1} \\ &= \frac{(1-x)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \\ &= \frac{\cancel{(1-x)}(\sqrt{x}-1)}{\cancel{x-1}} \end{aligned}$$

$\boxed{B = 1 - \sqrt{x}}$

2.

$$\begin{aligned} D &= \frac{n^2+n}{2} - \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + \frac{n(n+1)(2n-1)}{6} \\ &= \frac{6\,n(n+1)}{12} - \frac{3\;\, n^2(n+1)^2}{12} + \frac{2\,n(n+1)(2n-1)}{12} \\ &= \frac{n(n+1)}{12}\Big(6 - 3n(n+1) + 2(2n-1)\Big) \\ &= \frac{n(n+1)}{12}\left(-3n^2+n+4\right) \\ &= \frac{n(n+1)}{12}(n+1)(-3n+4) \qquad \text{-1 racine évidente ou } \Delta = 49... \end{aligned}$$

$$\boxed{D = \frac{n(n+1)^2(4-3n)}{12}}$$

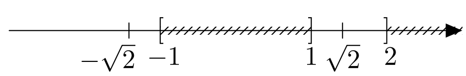
3. $$\begin{aligned} D &= \frac{n^2+n}{2} - \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + \frac{n(n+1)(2n-1)}{6} \\ &= \frac{6\,n(n+1)}{12} - \frac{3\;\, n^2(n+1)^2}{12} + \frac{2\,n(n+1)(2n-1)}{12} \\ &= \frac{n(n+1)}{12}\Big(6 - 3n(n+1) + 2(2n-1)\Big) \\ &= \frac{n(n+1)}{12}\left(-3n^2+n+4\right) \\ &= \frac{n(n+1)}{12}(n+1)(-3n+4) \qquad \text{-1 racine évidente ou } \Delta = 49... \end{aligned}$$

$$\boxed{D = \frac{n(n+1)^2(4-3n)}{12}}$$

4. $f(x) = \dfrac{\sqrt{2-x}}{\ln(x^2-1)}$

- $\sqrt{2-x}$ est défini $\Leftrightarrow 2-x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 2$
- $\ln(x^2-1)$ est défini $\Leftrightarrow x^2-1>0 \Leftrightarrow x^2>1 \Leftrightarrow x>1$ ou $x<-1$
- la fraction est définie $\Leftrightarrow \ln(x^2-1) \neq 0 \Leftrightarrow x^2-1 \neq 1 \Leftrightarrow x^2 \neq 2 \Leftrightarrow x \neq \sqrt{2}$ et $x \neq -\sqrt{2}$

$1<2<4$ donc $1<\sqrt{2}<2$ et $-\sqrt{2}<-1$



$\boxed{f \text{ est définie sur }]-\infty,-\sqrt{2}[\,\cup\,]-\sqrt{2},-1[\,\cup\,]1,\sqrt{2}[\,\cup\,]\sqrt{2},2]}$

Exercice 3. *Équation, inéquation et encadrement*

1. $\mathcal{D}_E = \mathbb{R}^*$.
   Soit $x \neq 0$.
   $(E) \iff x-8+\dfrac{15}{x} = 0 \iff \frac{x^2-8x+15}{x} = 0 \iff x^2-8x+15=0$
   $\Delta = (-8)^2 - 4\times 15 = 4$ donc $x_1 = \frac{8-2}{2} = 3$ et $x_2 = \frac{8+2}{2} = 5$
   $\boxed{\mathscr{S}_E = \{3,5\}}$
2. $\sqrt{x+2} = x \iff x \geqslant 0$ et $x+2 = x^2 \iff x \geqslant 0$ et $x^2-x-2=0$

Le polynôme $x^2 - x - 2$ a pour racine évidente -1 donc on peut le factoriser par $x+1$. Par identification on trouve $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$ donc la deuxième racine est 2.

D'après l'équivalence précédente on peut affirmer que seul 2 est une solution de (E) car $-1 < 0$. $\boxed{\mathscr{S}_{(E)} = \{2\}}$

3. L'équation $|x+1| = |3x-4|$ est définie sur $\mathbb{R}$.

   Soit $x \in \mathbb{R}$.

   $$\begin{aligned} |x+1| = |3x-4| &\Leftrightarrow x+1 = 3x-4 \text{ ou } x+1 = -3x+4 \\ &\Leftrightarrow 2x = 5 \text{ ou } 4x = 3 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \text{ ou } x = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

   $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{5}{2}, \frac{3}{4}\right\}}$

4. $\mathscr{D}_E = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

   Premier cas : $x > -2$

   $\frac{1}{x+2} > 0$ donc

   $$\begin{aligned} (E) &\iff x+2 > \tfrac{1}{1} \text{ par stricte décroissance de la fonction inverse sur }]0, +\infty[\\ &\iff x > -1 \end{aligned}$$

   On obtient comme solutions sur $]-2, +\infty[$: $]-1, +\infty[$.

   Deuxième cas : $x < -2$

   $\frac{1}{x+2} < 0$ et $1 > 0$ donc (E) est toujours vérifiée.

   On obtient comme solutions sur $]-\infty, -2[$: $]-\infty, -2[$.

   Bilan : $\boxed{\mathscr{S}_E =]-\infty, -2[\cup]-1, +\infty[}$.

5. $\ln(x+3) + \ln(x-1) \leqslant 2\ln(\sqrt{3})$

   L'inéquation est définie ssi $\begin{cases} x+3 > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} x > -3 \\ x > 1 \end{cases}$ donc elle est définie sur $\boxed{]1, +\infty[}$.

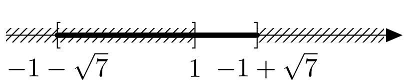
   Soit $x \in]1, +\infty[$.

   $$\begin{aligned} \ln(x+3) + \ln(x-1) \leqslant 2\ln(\sqrt{3}) &\Leftrightarrow \ln\big((x+3)(x-1)\big) \leqslant \ln(3) \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 \leqslant 3 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2x - 6 \leqslant 0 \end{aligned}$$

   $\Delta = 4 + 4 \times 6 = 28$ donc $\sqrt{\Delta} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$.
   Les solutions de $x^2 + 2x - 6 = 0$ sont $-1 - \sqrt{7}$ et $-1 + \sqrt{7}$.

   D'après la règle du signe d'un trinôme, on a donc :
   $\ln(x+3) + \ln(x+1) \leqslant 2\ln(\sqrt{3}) \Leftrightarrow -1 - \sqrt{7} \leqslant x \leqslant -1 + \sqrt{7}$

   Or $x \in]1, +\infty[$ et $-1 - \sqrt{7} < 0$ donc $-1 - \sqrt{7} < 1$
   De plus, $4 < 7 < 9$ donc $2 < \sqrt{7} < 3$ d'où $1 < -1 + \sqrt{7}$



$\boxed{\mathcal{S} =]1, -1 + \sqrt{7}]}$

Exercice 4. *Encadrement*

D'une part on sait que $2 < e < 3$, donc $4 < e^2 < 9$ et ainsi $\underline{2 < e^2 - 2 < 7}$.
D'autre part, $4 < 2e < 6$ donc $5 < 2e + 1 < 7$ et en prenant l'inverse (tout est strictement positif),

on a $\dfrac{1}{7} < \dfrac{1}{2e+1} < \dfrac{1}{5}$.

En multipliant membre à membre les deux encadrements (tout est positif), $\boxed{\dfrac{2}{7} < A < \dfrac{7}{5}}$

Par produit, $-2 > -e > -3$
Par somme, $2 > 4-e > 1$
Par stricte croissance de la fonction racine sur $\mathbb{R}_+$, $\sqrt{2} > \sqrt{4-e} > \sqrt{1} = 1$
Par stricte décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, $\frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{1}{\sqrt{4-e}} < \frac{1}{1} = 1$

Sachant que $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, on obtient l'encadrement $\boxed{\dfrac{\sqrt{2}}{2} < B < 1}$

Exercice 5. *Récurrences*

1. On considère $x > 0$.
   On considère la propriété $\mathscr{P}(n)$: "$(1+x)^n > 1+nx$".

   Initialisation.
   $(1+x)^2 - (1+2x) = 1+2x+x^2-(1+2x) = x^2 > 0$ car $x \neq 0$.
   On en déduit que $(1+x)^2 > 1+2x$ qui correspond à la propriété au rang 2.

   Hérédité.
   Soit $n \geqslant 2$, supposons que $(1+x)^n > 1+nx$.
   Obj : $(1+x)^{n+1} > 1+(n+1)x$.
   Par hypothèse de récurrence on a : $(1+x)^n > 1+nx$
   On multiplie par $1+x > 0$: $(1+x)^{n+1} > (1+nx)(1+x)$
   On développe le membre de droite : $(1+x)^{n+1} > 1+nx+x+nx^2$
   On rassemble les termes en x : $(1+x)^{n+1} > 1+(n+1)x+nx^2$
   Par ailleurs $n > 0$ et $x \neq 0$ donc $nx^2 > 0$
   Par somme : $1+(n+1)x+nx^2 > 1+(n+1)x$
   Par transitivité : $(1+x)^{n+1} > 1+(n+1)x$ d'où la propriété au rang $n+1$

   Conclusion.
   $\boxed{\forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ (1+x)^n > 1+nx}$

2. Démontrer par récurrence d'ordre 2 que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant 2^n$.

   Initialisation.
   $u_0 = 1$ et $2^0 = 1$ d'où la propriété au rang 0.
   $u_1 = 1$ et $2^1 = 2$ d'où la propriété au rang 1.

   Hérédité.
   Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n \leqslant 2^n$ et $u_{n+1} \leqslant 2^{n+1}$.
   Par somme à membre on obtient $u_n + u_{n+1} \leqslant 2^n + 2^{n+1}$
   Sachant que $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, on obtient $u_{n+2} \leqslant 2^n + 2^{n+1}$
   On a $2^n + 2^{n+1} = 2^n + 2 \times 2^n = (1+2)2^n = 3 \times 2^n$
   On a également $2^{n+2} = 2^2 2^n = 4 \times 2^n$.
   2^n étant positif on a $3 \times 2^n \leqslant 4 \times 2^n$ donc par report, $2^n + 2^{n+1} \leqslant 2^{n+2}$
   Par transitivité on obtient $u_{n+2} \leqslant 2^{n+2}$ ce qui correspond à la propriété au rang $n+2$

   Conclusion.
   $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant 2^n}$

3. (a) $\boxed{u_2 = 2}$ et $\boxed{u_3 = 3}$
   (b) $\boxed{\text{On conjecture naturellement que } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n.}$
   (c) Démontrons la conjecture de la question précédente par récurrence d'ordre 2.

   Initialisation.
   $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ d'où la proposition aux rang 0 et 1.
   Hérédité.
   Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n = n$ et $u_{n+1} = n + 1$.
   Obj : $u_{n+2} = n + 2$.
   $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n = 2(n + 1) - n = 2n + 2 - n = n + 2$ d'où la propriété au rang $n + 2$
   Conclusion.
   $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n}$

Exercice 6. *Étude de fonction*

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ donc $1 + e^x > 0$ donc $\ln(1 + e^x)$ est bien défini $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}}$
2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Raisonnons par équivalence :
   - $$\begin{aligned} f(x) < x &\Leftrightarrow x - 2\ln(1 + e^x) < x \\ &\Leftrightarrow -2\ln(1 + e^x) < 0 \\ &\Leftrightarrow \ln(1 + e^x) > 0 \\ &\Leftrightarrow 1 + e^x > 1 \\ &\Leftrightarrow e^x > 0 \quad \text{ce qui est toujours vrai} \end{aligned}$$

   Donc $\boxed{f(x) < x,\ \forall x \in \mathbb{R}}$ $\quad (\star)$

   Rédaction alternative : signe de la différence
   $f(x) - x = -2\ln(1 + e^x)$.
   Or $e^x > 0$ donc $1 + e^x > 1$ d'où $\ln(1 + e^x) > 0$ donc $-2\ln(1 + e^x) < 0$
   Ainsi, $f(x) - x < 0$ et on a donc $\boxed{f(x) < x,\ \forall x \in \mathbb{R}}$

   - $$\begin{aligned} f(x) < -x &\Leftrightarrow x - 2\ln(1 + e^x) < -x \\ &\Leftrightarrow -2\ln(1 + e^x) < -2x \\ &\Leftrightarrow \ln(1 + e^x) > x \\ &\Leftrightarrow 1 + e^x > e^x \\ &\Leftrightarrow 1 > 0 \quad \text{ce qui est vrai} \end{aligned}$$

   Donc $\boxed{f(x) < -x,\ \forall x \in \mathbb{R}}$

   Rédaction alternative : en utilisant la parité (plus rapide !)
   D'après $(\star)$, $f(-x) < -x$. Or f est paire donc $f(-x) = f(x)$. Donc $f(x) < -x$.

   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$.
   1ère méthode : D'après la question 3a)
   $f(x) < -x$ et $f(x) < x$ donc $2f(x) < 0$ d'où $\boxed{f(x) < 0,\ \forall x \in \mathbb{R}}$
   2ème méthode : D'après la question 3a)
   Si $x \geqslant 0$, comme $f(x) < -x$ et $-x \leqslant 0$, on a $f(x) < 0$
   Si $x < 0$, comme $f(x) < x$ on a $f(x) < 0$.

Dans tous les cas, on a $\boxed{f(x) < 0,\ \forall x \in \mathbb{R}}$

<u>3ème méthode</u> : via une inéquation

$$\begin{aligned} f(x) < 0 &\Leftrightarrow x - 2\ln(1+e^x) < 0 \\ &\Leftrightarrow -2\ln(1+e^x) < -x \\ &\Leftrightarrow \ln\left((1+e^x)^2\right) > x \\ &\Leftrightarrow (1+e^x)^2 > e^x \\ &\Leftrightarrow 1 + 2e^x + (e^x)^2 > e^x \\ &\Leftrightarrow (e^x)^2 + e^x + 1 > 0 \end{aligned}$$

Etudions le trinôme $X^2 + X + 1$. $\Delta = -3 < 0$ donc $X^2 + X + 1 > 0$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $(e^x)^2 + e^x + 1 > 0$ d'où $\boxed{f(x) < 0,\ \forall x \in \mathbb{R}}$

3. (a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

   $\ln(1+e^x)$ est de la forme $\ln(u)$ avec $\begin{array}{l} u(x) = 1 + e^x \\ u'(x) = e^x \end{array}$ et $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.

   $$\forall x \in \mathbb{R},\quad f'(x) = 1 - 2 \times \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1 + e^x - 2e^x}{1+e^x}$$

   $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{1-e^x}{1+e^x}}$$

   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$.

   Comme $1 + e^x > 0$, $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - e^x > 0$
   $\Leftrightarrow 1 > e^x$
   $\Leftrightarrow 0 > x$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$-2\ln 2$	$\searrow$	

   $f(0) = -2\ln(1+e^0) = -2\ln 2$

4. Pour tracer la courbe on utilise :
   - les variations
   - $f(x) < x$ et $f(x) < -x$: la courbe de f est en dessous des droites d'équation $y = x$ et $y = -x$