Mathématiques

Lycée THIERS
Année 23-24

Devoir surveillé n° 2

1BCPST 2

21 octobre 2023
Durée : 3h

Qualité de la rédaction, clarté des raisonnements, présentation, orthographe et ponctuation font partie des critères de notation. Il est vivement recommandé de lire attentivement les questions et d'*encadrer les résultats*. L'usage des calculatrices est ***interdit***.

Exercice 1. *Une fonction peut en cacher une autre*

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}(x^2 + 1 - \ln x)$

On pourra admettre que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

1. Soit g la fonction définie par $g(x) = x^2 + \ln x - 2$.
   (a) Dresser le tableau de variation de g en faisant figurer les limites aux bornes.
   (b) En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α.
   (c) En déduire le signe de $g(x)$ en fonction de x.
2. (a) Calculer $f'(x)$ puis l'exprimer sous la forme d'une fraction.
   (b) Dresser le tableau de variation de f en faisant figurer les limites aux bornes.
   (c) Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f en 1.
   (d) Étudier le signe de $f(x) - x$ et en donner une interprétation graphique.
   (e) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x$ puis interpréter graphiquement cette limite.
   (f) Tracer la courbe de f à l'aide des 4 questions précédentes. On donne $\alpha \approx 1,3$ et $f(\alpha) \approx 1,9$.

Exercice 2. *Quelques sommes*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

1. $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^k$
2. $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} + 1\right) 3^n$
3. $S = \displaystyle\sum_{i=1}^{2n} i(i+2)$
4. $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} 3^{k+1} 4^{n-k}$

Exercice 3.

Soit f la fonction d'expression $f(x) = 2\cos x + \sin^2 x$

1. En utilisant l'inégalité triangulaire, trouver un majorant de $|f|$ puis un minorant et un majorant de f.
2. Justifier que l'on peut étudier f sur $[0, \pi]$.
3. Dresser le tableau de variation de f sur $[0, \pi]$ en faisant figurer les valeurs aux bornes.
4. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0, \pi]$ que l'on notera α.
5. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $[-\pi, \pi]$ puis sur $\mathbb{R}$.
6. Déterminer le minimum et le maximum de f sur $\mathbb{R}$. Est-ce que ces valeurs sont cohérentes avec les résultats de la première question ?
7. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point $\frac{\pi}{2}$.
8. Tracer la courbe de f sur $[-\pi, 2\pi]$ en tenant compte des questions précédentes. On donne $\alpha \approx 2$.

Exercice 4. *Une grande période*

Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \cos\left(\frac{x}{5}\right) - \sin\left(\frac{x}{3}\right)$ est périodique et déterminer une période.

Exercice 5. *Suite récurrente*

On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = u_2 = 1$ et $u_{n+2} = n(u_{n+1} + u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (n-1)!$

Exercice 6. *Deux jolies formules*

On désigne par n et k deux entiers naturels tels que $k \leqslant n$.

1. Montrer que pour tout $i \in [\![k, n]\!]$, $\binom{n}{i}\binom{i}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{i-k}$.
2. À l'aide du changement d'indice $j = i - k$, en déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$\displaystyle\sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i}\binom{i}{k} x^{n-i} = \binom{n}{k}(1+x)^{n-k}$.

Exercice 7. *Calculs de dérivées*

Déterminer l'ensemble de définition puis dériver chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{-\ln x}}$
2. $g(x) = \sqrt{1 - \ln(3 - \mathrm{e}^x)}$
3. $h(x) = \dfrac{1}{\tan x}$

Exercice 8. *Python*

1. Écrire une fonction python `fact` d'argument `n` qui renvoie $n!$.
2. Écrire une fonction `seuil` sans argument qui renvoie le plus petit entier n tel que $n! > 10^5$.