Mathématiques
Devoir surveillé n° 2

Lycée THIERS
Année 23-24

1BCPST 2

21 octobre 2023
Durée : 3h

Qualité de la rédaction, clarté des raisonnements, présentation, orthographe et ponctuation font partie des critères de notation.
Il est vivement recommandé de lire attentivement les questions et d'*encadrer les résultats*. L'usage des calculatrices est ***interdit***.

Exercice 1. *Une fonction peut en cacher une autre*

1. (a) $x \in \mathscr{D}_g \iff x > 0$ donc $\mathscr{D}_g = \mathbb{R}_+^*$
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $g'(x) = 2x + \frac{1}{x} > 0$.
Par ailleurs on sait (fonctions usuelles) que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ donc par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
On sait également que $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0^2 = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ donc par somme $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$.
On en déduit le tableau de variation :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$\Vert$ $+$	
$g(x)$	$\Vert$ $-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

(b) On a $0 \in]-\infty, +\infty[$ donc d'après le tableau de variation de g,
$\boxed{\text{l'équation } g(x) = 0 \text{ admet une unique solution } \alpha.}$
<u>Autre rédaction</u> : g est strictement croissante et continue sur $]0, +\infty[$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$ et $0 \in]-\infty, +\infty[$ donc par le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α.

(c) D'après les deux questions précédentes on obtient le tableau de variation suivant :

x	0	α	$+\infty$
$g'(x)$	$\Vert$ $+$	$+$	
$g(x)$	$\Vert$ $-\infty$ $\nearrow$	0 $\nearrow$	$+\infty$

$\boxed{g \text{ est strictement négative sur }]0, \alpha[\text{ et strictement positive sur }]\alpha, +\infty[.}$

2. (a) Il y a plusieurs façons de dériver f suivant que l'on voit $f(x)$ comme un produit, un quotient ou une somme (après avoir développé) mais comme on demande d'exprimer $f'(x)$ sous la forme d'une fraction, on va dériver f comme une fraction.
$f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = x^2 + 1 - \ln x$ et $v(x) = x$.
$f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u'(x) = 2x - \frac{1}{x}$ et $v'(x) = 1$
donc $f'(x) = \frac{(2x - \frac{1}{x})x - (x^2 + 1 - \ln x)1}{x^2} = \frac{2x^2 - 1 - x^2 - 1 + \ln x}{x^2} = \frac{x^2 + \ln x - 2}{x^2}$

$$\boxed{f'(x) = \frac{x^2 + \ln x - 2}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}}$$

(b) D'après la question précédente $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe car x^2 est strictement positif sur $\mathbb{R}_+^*$.

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x^2+1=1\\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} -\ln x=+\infty\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{par somme}\\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x^2+1-\ln x=+\infty\end{array}$$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \dfrac{1}{x}=+\infty$ donc par produit $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=+\infty}$

En développant on trouve $f(x)=\dfrac{x^2}{x}+\dfrac{1}{x}-\dfrac{\ln x}{x}=x+\dfrac{1}{x}-\dfrac{\ln x}{x}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}=0\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{par somme}\\ \lim\limits_{x\to+\infty} x+\dfrac{1}{x}=+\infty\end{array}$$

D'après l'énoncé on a $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{\ln x}{x}=0$ donc par somme $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$

On en déduit le tableau de variation de f :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

(c) $f(1)=\frac{1}{1}(1^2+1-\ln 1)=2$.D'après la question 2a, $f'(1)=\frac{1^2+\ln 1-2}{1^2}=-1$
donc $f(1)+f'(1)(x-1)=2-(x-1)=-x+3$.

$\boxed{\text{La tangente à la courbe de } f \text{ en 1 a pour équation } y=-x+3.}$

(d) Soit $x>0$.
$f(x)-x=\cancel{x}+\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}-\cancel{x}=\frac{1-\ln x}{x}$
Le nombre x étant strictement positif, on peut dire que $f(x)-x$ et $1-\ln x$ ont le même signe.
On va donc résoudre l'inéquation $1-\ln x>0$.
$1-\ln x>0 \iff 1>\ln x \iff \mathrm{e}>x$. On en déduit le tableau de signe de $f(x)-x$:

x	0		e		$+\infty$
$f(x)-x$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

$\boxed{\text{La courbe de } f \text{ est au-dessus de la première bissectrice sur }]0,\mathrm{e}[\text{ et en dessous sur }]\mathrm{e},+\infty[.}$

(e) $f(x)-x=\dfrac{1}{x}-\dfrac{\ln x}{x}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{\ln x}{x}=0 \text{ (énoncé)}\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{par somme}\\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}-\dfrac{\ln x}{x}=0\end{array}$$

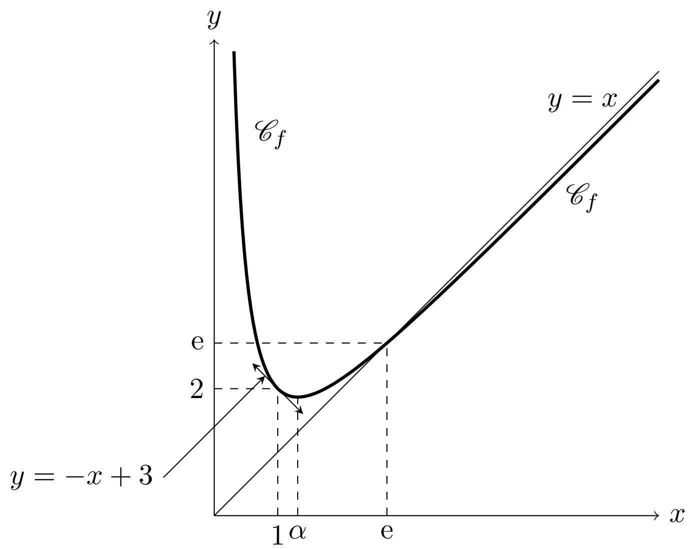
$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) - x = 0}$

On rappelle que dans un repère orthonormé, la droite d'équation $y = x$ est appelée première bissectrice.

$\boxed{\text{L'écart entre la courbe de } f \text{ et la première bissectrice tend vers 0 en } +\infty.}$

On dit aussi que la première bissectrice est une droite asymptote à la courbe de f en $+\infty$.

(f)



Exercice 2. *Quelques sommes*

1. $S = -\binom{n}{0}3^0 + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k$ par raccrochage

$= -1 + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k 1^{n-k}$

$= -1 + (3+1)^n$ d'après la formule du binôme de Newton

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^k = 4^n - 1}$$

2. $S = 3^n \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} + 1 \right)$ par factorisation (ou linéarité de $\sum$)

$= 3^n \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n} 1 \right)$ par linéarité de $\sum$

$= 3^n \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k + 1(n - 0 + 1) \right)$

$= 3^n \left((1+1)^n + n + 1 \right)$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} + 1 \right) 3^n = 3^n(2^n + n + 1) = 6^n + (n+1)3^n}$$

3.

$$\sum_{i=1}^{2n} i(i+2) = \sum_{i=1}^{2n} (i^2+2i) = \sum_{i=1}^{2n} i^2 + 2\sum_{i=1}^{2n} i$$
$$= \frac{\cancel{2}n(2n+1)(2\times 2n+1)}{\cancel{6}} + \cancel{2}\times\frac{2n(2n+1)}{\cancel{2}} = \frac{n(2n+1)(4n+1)+6n(2n+1)}{3}$$
$$\boxed{\sum_{i=1}^{2n} i(i+2) = \frac{n(2n+1)(4n+7)}{3}}$$

4.
$$\sum_{k=0}^{n-1} 3^{k+1}4^{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} 3\times 3^k \times 4^n \times 4^{-k} = 3\times 4^n \times \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{3}{4}\right)^k$$
$$= 3\times 4^n \times \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1-\frac{3}{4}} = 3\times 4^n\times 4\times\left(1-\frac{3^n}{4^n}\right)$$
$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} 3^{k+1}4^{n-k} = 12\times 4^n\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right) = 12\left(4^n-3^n\right)}$$

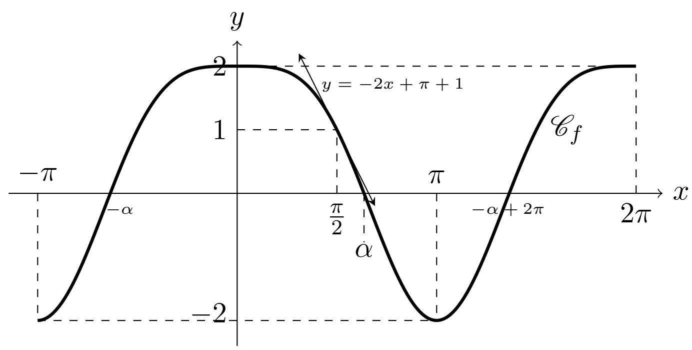
Exercice 3.

1. Il est clair que f est définie sur $\mathbb{R}$. Soit $x\in\mathbb{R}$.
   $|f(x)| = |2\cos x + \sin^2 x| \leqslant |2\cos x| + |\sin^2 x|$ d'après l'inégalité triangulaire.
   $|2\cos x| = 2|\cos x|$
   On sait que la fonction cosinus prend ses valeurs dans $[-1,1]$ donc $-1\leqslant\cos x\leqslant 1$ d'où $|\cos x|\leqslant 1$ et par produit $2|\cos x|\leqslant 2$
   $|\sin^2 x| = \sin^2 x$ car $\sin^2 x\geqslant 0$
   $\qquad = |\sin x|^2$ car deux nombres opposés ont le même carré
   On sait que la fonction sinus prend ses valeurs dans $[-1,1]$ donc $-1\leqslant\sin x\leqslant 1$ d'où $|\sin x|\leqslant 1$.
   Par stricte croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$, on obtient $|\sin x|^2\leqslant 1^2 = 1$.
   Par somme membre à membre $2|\cos x| + |\sin^2 x|\leqslant 3$ donc $|f(x)|\leqslant 3$.
   $\boxed{|f| \text{ est majorée par } 3.}$
   $|f(x)|\leqslant 3$ entraine que $-3\leqslant f(x)\leqslant 3$.
   $\boxed{3 \text{ est un majorant de } f \text{ et } -3 \text{ est un minorant de } f.}$
2. $f(-x) = 2\cos(-x)+\sin^2(-x) = 2\cos x + (-\sin x)^2$ car cos est paire et sin est impaire
   $\qquad = 2\cos x + \sin^2 x$ car deux nombres opposés ont le même carré
   $\qquad = f(x)$ donc f est une fonction paire
   $f(x+2\pi) = 2\cos(x+2\pi)+\sin^2(x+2\pi)$
   $\qquad = 2\cos x+\sin^2 x$ car cos et sin sont 2π-périodiques
   $\qquad = f(x)$ donc f est périodique de période 2π
   Par périodicité de f on peut se contenter d'étudier f sur $[-\pi,\pi]$.
   Sachant que f est paire on peut encore réduire le domaine d'étude à $[0,\pi]$.
   $\boxed{\text{Il suffit d'étudier } f \text{ sur } [0,\pi] \text{ pour connaitre son comportement sur } \mathbb{R}.}$
3. Commençons le démontage de f :
   $f = u+v$ avec $u(x) = 2\cos x$ et $v(x) = \sin^2 x$

$f' = u' + v'$ avec $u' = 2(-\sin x) = -2\sin x$ et $v = w^2$ avec $w = \sin$ donc $v' = 2w'w$ et $v'(x) = 2\cos x \sin x$
Par reports : $f'(x) = -2\sin x + 2\cos x \sin x = 2\sin x(\cos x - 1)$.
On sait que la fonction cosinus prend ses valeurs dans $[-1, 1]$ donc en particulier $\cos x \leqslant 1$
Sur $[0, \pi]$ cos ne prend la valeur 1 qu'en 0 donc pour tout $x \in]0, \pi]$, $\cos x - 1 < 0$.
On sait que sin est positive sur $[0, \pi]$ et qu'elle ne s'annule qu'en 0 et π sur cet intervalle donc
$\forall x \in]0, \pi[$, $\sin x > 0$.
Par produit, $\forall x \in]0, \pi[$, $\sin x(\cos x - 1) < 0$ et donc $f'(x) < 0$, ce qui montre que f est strictement décroissante sur $[0, \pi]$.
$f(0) = 2\cos 0 + \sin^2 0 = 2 \times 1 + 0^2 = 2$ et $f(\pi) = 2\cos\pi + \sin^2\pi = 2 \times (-1) + 0^2 = -2$.
On en déduit le tableau de variation :

x	0		π
$f'(x)$	0	$-$	0
$f(x)$	2	$\searrow$	-2

4. On a $0 \in [-2, 2]$ donc d'après le tableau de variation de f,
$\boxed{\text{l'équation } f(x) = 0 \text{ admet dans } [0, \pi] \text{ une unique solution } \alpha.}$
Autre rédaction : f est strictement décroissante et continue sur $[0, \pi]$, $f(0) = 2$, $f(\pi) = -2$ et $0 \in [-2, 2]$ donc par le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 0$ admet dans $[0, \pi]$ une unique solution.
5. D'après la question précédente l'équation $f(x) = 0$ admet comme unique solution dans $[0, \pi]$ le nombre α.
Par parité de f, l'équation $f(x) = 0$ admet comme unique solution dans $[-\pi, 0]$ le nombre $-\alpha$.
$\boxed{\text{Les solutions de l'équation } f(x) = 0 \text{ sur } [-\pi, \pi] \text{ sont } \alpha \text{ et } -\alpha.}$
Par périodicité de f on en déduit que
$\boxed{\text{les solutions de l'équation } f(x) = 0 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sont les nombres } \alpha + 2k\pi \text{ et } -\alpha + 2k\pi \text{ pour } k \in \mathbb{Z}.}$
6. Le minimum et le maximum de f sur $[0, \pi]$ sont respectivement -2 et 2.
Par parité et 2π-périodicité de f on en déduit que :
$\boxed{\text{le minimum et le maximum de } f \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sont respectivement } -2 \text{ et } 2.}$
Ceci se note également $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = -2$ et $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 2$.
Le minimum (resp. maximum), lorsqu'il existe, est le plus grand (resp. petit) des minorants (resp. majorants) donc le résultat de cette question est cohérent avec la question 1 car le minorant (resp. majorant) obtenu à la question 1 est inférieur (resp. supérieur) au minimum (resp. maximum).
7. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\frac{\pi}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} - 1\right) = 2 \times 1(0 - 1) = -2$
$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\cos\frac{\pi}{2} + \sin^2\frac{\pi}{2} = 2 \times 0 + 1^2 = 1$.
$f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 1 - 2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 1 - 2x + \pi = -2x + \pi + 1$.
$\boxed{\text{La tangente à la courbe de } f \text{ au point } \frac{\pi}{2} \text{ a pour équation } y = -2x + \pi + 1.}$
8.



Exercice 4. *Une grande période*

Cherchons une période commune p à $g : x \mapsto \cos\left(\frac{x}{5}\right)$ et à $h : x \mapsto \sin\left(\frac{x}{3}\right)$.
$g(x+p) = \cos\left(\frac{x+p}{5}\right) = \cos\left(\frac{x}{5}+\frac{p}{5}\right)$ donc pour que p soit une période de g il suffit qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{p}{5} = 2k\pi$ c'est-à-dire $p = 10k\pi$.
$h(x+p) = \sin\left(\frac{x+p}{3}\right) = \sin\left(\frac{x}{3}+\frac{p}{3}\right)$ donc pour que p soit une période de h il suffit qu'il existe $k' \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{p}{3} = 2k'\pi$ c'est-à-dire $p = 6k'\pi$.
Les égalités $p = 10k\pi$ et $p = 6k'\pi$ entrainent $10k\cancel{\pi} = 6k'\cancel{\pi}$ et donc $5k = 3k'$. Cette dernière égalité est satisfaite si $k = 3$ et $k' = 5$ ce qui entraine $p = 10 \times 3\pi = 30\pi$.
Pour $p = 30\pi, k = 3, k' = 5$, on a bien $p = 10k\pi$ et $p = 6k'\pi$ donc 30π est une période commune à g et h.
$f(x+30\pi) = g(x+30\pi) + h(x+30\pi) = g(x) + h(x) = f(x)$ donc $\boxed{f \text{ est périodique de période } 30\pi.}$
Tout multiple non nul de 30π (comme 60π) est également une période de f.

Exercice 5. *Suite récurrente*

$u_1 = u_2 = 1$ et $u_{n+2} = n(u_{n+1} + u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Montrons par récurrence double que la propriété $\mathcal{P}(n)$: " $u_n = (n-1)!$ " est vraie $\forall n \in \mathbb{N}^*$

<u>Initialisation</u> : pour $n = 1$, on a $u_1 = 1$ et $(1-1)! = 0! = 1$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
pour $n = 2$, on a $u_2 = 1$ et $(2-1)! = 1! = 1$ donc $\mathcal{P}(2)$ est vraie.

<u>Hérédité</u> : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies : $u_n = (n-1)!$ et $u_{n+1} = n!$

$u_{n+2} = n(u_{n+1} + u_n) = n(n! + (n-1)!) = n \times n! + n \times (n-1)! = n \times n! + n! = (n+1)n! = (n+1)!$
Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

<u>Conclusion</u> : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = (n-1)!.}$

Exercice 6. *Deux jolies formules*

1. Soit $i \in [\![k, n]\!]$.
   D'une part $\dbinom{n}{i}\dbinom{i}{k} = \dfrac{n!}{i!(n-i)!} \times \dfrac{i!}{k!(i-k)!} = \dfrac{n!}{(n-i)!k!(i-k)!}$

   D'autre part,
   $$\binom{n}{k}\binom{n-k}{i-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{(n-k)!}{(i-k)!\big((n-k)-(i-k)\big)!} = \frac{n!}{k!(i-k)!(n-i)!}$$

   Donc $\boxed{\dbinom{n}{i}\dbinom{i}{k} = \dbinom{n}{k}\dbinom{n-k}{i-k}.}$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la question 1,
   $$\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{k}x^{n-i} = \sum_{i=k}^{n}\binom{n}{k}\binom{n-k}{i-k}x^{n-i} = \binom{n}{k}\sum_{i=k}^{n}\binom{n-k}{i-k}x^{n-i}.$$

On pose $j = i - k$. Quand $i = k$, $j = 0$.
Quand $i = n$, $j = n - k$.
De plus, avec $j = i - k$, on a $i = j + k$ et donc $n - i = n - (j + k)$.

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i}\binom{i}{k} x^{n-i} = \binom{n}{k}\sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} x^{n-(j+k)} = \binom{n}{k}\sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} x^{n-k-j}\, 1^j$$

D'après la formule du binôme de Newton, $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} x^{n-k-j}\, 1^j = (x+1)^{n-k}$.

Ainsi, $\boxed{\displaystyle\sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i}\binom{i}{k} x^{n-i} = \binom{n}{k}(1+x)^{n-k}.}$

Exercice 7. *Calculs de dérivées*

1. $x \in \mathscr{D}_f \iff \begin{cases} x > 0 \text{ contrainte liée à ln} \\ -\ln x \geqslant 0 \text{ contrainte liée à la racine} \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \leqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0 \\ x \leqslant \mathrm{e}^0 = 1 \end{cases}$

   donc $\boxed{\mathscr{D}_f =]0,1]}$

   Effectuons un démontage de f pour la dériver.

   $f = \mathrm{e}^u$ avec $u(x) = \sqrt{-\ln x}$

   $f' = u'\,\mathrm{e}^u$ avec $u = \sqrt{v}$ et $v(x) = -\ln x$ donc $u' = \frac{v'}{2\sqrt{v}}$ avec $v'(x) = -\frac{1}{x}$

   donc $u'(x) = \frac{-\frac{1}{x}}{2\sqrt{-\ln x}} = -\frac{1}{2x\sqrt{-\ln x}}$. Par report, $\boxed{f'(x) = -\dfrac{1}{2x\sqrt{-\ln x}}\,\mathrm{e}^{\sqrt{-\ln x}}}$

   On remarque que cette formule n'est pas valable pour $x = 1$. Cela vient du fait que la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.

2. $x \in \mathscr{D}_g \iff \begin{cases} 3 - \mathrm{e}^x > 0 \text{ contrainte liée à ln} \\ 1 - \ln(3 - \mathrm{e}^x) \geqslant 0 \text{ contrainte liée à la racine} \end{cases}$

   $\iff \begin{cases} 3 > \mathrm{e}^x \\ 1 \geqslant \ln(3 - \mathrm{e}^x) \end{cases} \iff \begin{cases} \ln 3 > x \\ \mathrm{e}^1 \geqslant 3 - \mathrm{e}^x \end{cases} \iff \begin{cases} x < \ln 3 \\ \mathrm{e}^x \geqslant 3 - \mathrm{e} \end{cases} \overset{3>\mathrm{e}}{\iff} \begin{cases} x < \ln 3 \\ x \geqslant \ln(3 - \mathrm{e}) \end{cases}$

   donc $\boxed{\mathscr{D}_g = [\ln(3-\mathrm{e})\,, \ln 3[}$

   Effectuons un démontage de g pour la dériver.

   $g = \sqrt{u}$ avec $u(x) = 1 - \ln(3 - \mathrm{e}^x)$

   $g' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ avec $u = 1 - \ln v$ et $v(x) = 3 - \mathrm{e}^x$

   $u' = -\frac{v'}{v}$ avec $v'(x) = -\mathrm{e}^x$ donc $u'(x) = -\frac{-\mathrm{e}^x}{3-\mathrm{e}^x} = \frac{\mathrm{e}^x}{3-\mathrm{e}^x}$

   On en déduit que $g'(x) = \frac{\frac{\mathrm{e}^x}{3-\mathrm{e}^x}}{2\sqrt{1-\ln(3-\mathrm{e}^x)}}$

   $\boxed{g'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{2(3 - \mathrm{e}^x)\sqrt{1 - \ln(3 - \mathrm{e}^x)}}}$

   On remarque que cette formule n'est pas valable pour $x = \ln(3 - \mathrm{e})$. Cela vient du fait que la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.

3. $x \in \mathscr{D}_h \iff \begin{cases} x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \text{ contrainte liée à tan} \\ \tan x \neq 0 \text{ contrainte liée au dénominateur} \end{cases}$

   $\tan x = 0 \iff \sin x = 0$ car $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$\iff \exists k \in \mathbb{Z},\, x = k\pi$

donc l'ensemble des solutions de l'équation $\tan x = 0$ est $\{k\pi,\, k \in \mathbb{Z}\}$

En notant $\boxed{A = \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\, k \in \mathbb{Z}\right\}}$ et $\boxed{B = \{k\pi,\, k \in \mathbb{Z}\}}$ on a donc $\boxed{\mathscr{D}_h = \mathbb{R} \setminus (A \cup B)}$

On remarque que $\frac{\pi}{2} + k\pi = \frac{\pi}{2} + 2k\frac{\pi}{2} = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ donc $A = \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2},\, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

On a également $B = \{2k\frac{\pi}{2},\, k \in \mathbb{Z}\}$ donc $A \cup B = \left\{n\frac{\pi}{2},\, n \text{ impair}\right\} \cup \left\{n\frac{\pi}{2},\, n \text{ pair}\right\} = \left\{n\frac{\pi}{2},\, n \in \mathbb{Z}\right\}$

$\boxed{\mathscr{D}_h = \mathbb{R} \setminus \left\{k\dfrac{\pi}{2},\, k \in \mathbb{Z}\right\}}$

$h = \frac{1}{\tan}$ donc $h' = -\frac{\tan'}{\tan^2}$ or $\tan' = 1 + \tan^2$ donc $h' = -\frac{1+\tan^2}{\tan^2} = -\left(\frac{1}{\tan^2} + 1\right)$

$\boxed{h'(x) = -1 - \dfrac{1}{\tan^2 x}}$

Autre calcul : $\tan' = \frac{1}{\cos^2}$ donc $h' = -\frac{\frac{1}{\cos^2}}{\tan^2} = -\frac{1}{\cos^2 \tan^2}$

or $\cos^2 \tan^2 = \cos^2\left(\frac{\sin}{\cos}\right)^2 = \cancel{\cos^2}\frac{\sin^2}{\cancel{\cos^2}} = \sin^2$ donc $h' = -\frac{1}{\sin^2}$

$\boxed{h'(x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x}}$

Autre calcul : $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ donc $h = \frac{\cos}{\sin}$ et $h' = \frac{\cos' \sin - \cos \sin'}{\sin^2} = \frac{-\sin \times \sin - \cos \times \cos}{\sin^2}$

$h' = -\frac{\sin^2 + \cos^2}{\sin^2} = -\frac{1}{\sin^2}$. On retrouve $\boxed{h'(x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x}}$

Exercice 8. *Python*

1.
```
def fact(n):
    prod=1
    for k in range(1,n+1):
        prod = prod*k
    return prod
```

2.
```
def seuil():
    n=0
    while fact(n)<=10**5:
        n=n+1
    return n
def seuilBis():
    prod,k=1,0
    while prod<=10**5:
        k = k+1
        prod = prod*k
    return k
```

La deuxième fonction limite les calculs effectués (ne recalcule pas tous les produits précédents). On trouve $n = 9$, avec $9! = 362880$.