

Exercice 1

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $\sqrt{\overbrace{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}^{n-1 \text{ chiffres } 2}}^{n-1 \text{ chiffres } 2}} = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$.

Indication : on notera $u_n = \sqrt{\overbrace{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}^{n-1 \text{ chiffres } 2}}^{n-1 \text{ chiffres } 2}}$ puis on montrera par récurrence que

$$u_n = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right).$$

En déduire les expressions de $\cos \frac{\pi}{8}$, $\sin \frac{\pi}{8}$, $\cos \frac{\pi}{16}$ et $\sin \frac{\pi}{16}$.

$$\text{Calculer } \ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\overbrace{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}^{n-1 \text{ chiffres } 2}}^{n-1 \text{ chiffres } 2}}.$$

Exercice 2

On cherche à déterminer la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimer $\sin(5\theta)$ en fonction de $\sin \theta$.
2. En déduire que $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ est solution de l'équation (E) : $16x^4 - 20x^2 + 5 = 0$.
3. Résoudre l'équation (E) dans \mathbb{R} .
4. En déduire que $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}}$.
5. En déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$.

Exercice 3

Résoudre graphiquement dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

- $\cos x < \frac{1}{2}$.
- $\sin x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- $\tan x \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Exercice 4

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

- $2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$.
- $2 \sin\left(\frac{x+\pi}{3}\right) = -1$
- $\cos x + \sqrt{3} \sin x = 1$
- $\sin(2x) - \cos(2x) = 1$.
- $\tan(2x) = 1$.

- $\cos^4(x) - \sin^2(x) - 1 = 0$.
- $1 + \cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) = 0$.
- $2 \cos x + 5 \sin x + a = 0$ où a est un paramètre réel.

Exercice 5

Rappeler les formules de duplication du sinus et du cosinus et en déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 6

1. Démontrer que $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\sin(a) \cos(b) = \frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2}$.

2. Application.

Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n \cos(kx) = \cos\left(\frac{nx}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$

pour tout x non multiple de 2π .

Exercice 7

On note $A = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{p\pi}{2^k}, (p, k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \right\}$.

Soit $x \in A$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on définit $u_k = \frac{\sin(2^k x)}{2^k}$

1. Classer les nombres $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \pi$ en fonction de leur appartenance ou non à l'ensemble A .
2. Justifier que $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_k \neq 0$.
3. Déterminer a de sorte que $\frac{u_{k+1}}{u_k} = \cos(a)$.
4. Clore le produit $\prod_{k=0}^n \cos(2^k x)$.
5. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=0}^n \cos(2^k x)$.