Exercice 1 (Composition, antécédent, image, restriction, prolongement)

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x+1} \end{cases}$ et $g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto 4x^2 \end{cases}$

1. Déterminer l'expression des composés $f \circ g$ et $g \circ f$.
2. Calculer les images de -1 et 2 par ces deux composés. (Attention au piège !)
3. Déterminer les éventuels antécédents de $0, 1, 2$ par $f \circ g$.
4. Déterminer $g\big(]-2,1]\big)$ puis $f \circ g\big(]-2,1]\big)$.
5. Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de $f, g, g \circ f$ et $f \circ g$.
6. Déterminer une partie A de $\mathbb{R}$ telle que $g_{|A}$ soit une bijection.
7. Déterminer un prolongement h de f tel que $g \circ h$ soit une bijection.

Exercice 2 (Fonctions indicatrices... qui sont en fait des applications)
Soit E un ensemble et A et B deux parties de E.
On appelle fonction indicatrice de A, notée $\mathbf{1}_A$, l'application de E dans $\{0, 1\}$ définie par :
$\forall x \in E,\ \mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$. $\mathbf{1}_A$ est aussi appelée fonction caractéristique de A.
Démontrer que :

1. $A \subset B \Leftrightarrow \mathbf{1}_A \leq \mathbf{1}_B$
2. $A = B \Leftrightarrow \mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B$
3. $\mathbf{1}_A = (\mathbf{1}_A)^2$
4. $\mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B$
5. $\mathbf{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbf{1}_A$
6. $\mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B$
7. $\mathbf{1}_{A\smallsetminus B} = \mathbf{1}_A(1 - \mathbf{1}_B)$. On rappelle que $A \smallsetminus B = A \cap \overline{B}$.

Exercice 3 (Bijectivité par résolution explicite d'équation)
Soit f la fonction $x \mapsto 3x - 1$.

1. Pour $y \in \mathbb{R}$, résoudre l'équation $f(x) = y$ d'inconnue réelle x.
2. Montrer que f définit une bijection (encore notée f) de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et expliciter $f^{-1}(y)$.
3. Tracer à la main les courbes de f et de f^{-1}.

Exercice 4 (Bijectivité par résolution explicite d'équation)

On considère la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{2x+1}{3x+1}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Soit $y \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation $f(x) = y$ d'inconnue réelle x.
   Indication : on pourra discuter sur la valeur de y.
3. Montrer que l'on peut définir l'application $\begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{\alpha\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{\beta\} \\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$ que l'on notera également f où α et β sont des nombres que l'on déterminera.
   Justifier que f est bijective et donner l'expression de $f^{-1}(y)$ pour $y \in \mathbb{R} \setminus \{\beta\}$.
4. Écrire deux fonctions Python `f` et `reciproque_f` de paramètres respectifs `x` et `y` qui renvoient les valeurs de $f(x)$ et de $f^{-1}(y)$ lorsque le paramètre est dans l'ensemble de départ de l'application considérée.
5. Sans utiliser la fonction `reciproque_f`, écrire une fonction Python `courbes1` de paramètre `a` qui affiche la courbe de f sur l'intervalle $[-0.3, a]$ et la courbe de f^{-1} sur $f([-0.3, a])$.
6. Sans utiliser la fonction `reciproque_f`, écrire une fonction Python `courbes2` de paramètre `a` qui affiche la courbe de f sur l'intervalle $[a, -0.37]$ et la courbe de f^{-1} sur $f([a, -0.37])$.

Exercice 5 (Bijectivité par résolution explicite d'équation)
On considère la fonction $f : x \mapsto x^2 - 3x + 2$.

1. Soit $y \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation $f(x) = y$ d'inconnue réelle x.
   Indication : on pourra discuter sur la valeur de y.
2. Montrer que la fonction f réalise une bijection (encore notée f) de $]-\infty, \alpha]$ dans $[\beta, +\infty[$ où α et β sont des nombres que l'on déterminera puis expliciter $f^{-1}(y)$.
3. Écrire une fonction python `courbes` de paramètre `u` qui affiche la courbe de f sur $[u, \alpha]$ et la courbe de f^{-1} sur $f([u, \alpha])$.
4. Déterminer quatre applications f_1, f_2, f_3 et f_4 de même expression analytique que f telles que :
   - f_1 n'est ni injective ni surjective.
   - f_2 est injective mais pas surjective.
   - f_3 est surjective mais pas injective.
   - f_4 est bijective mais différente de l'application définie à la question précédente.

   Indication : pourra choisir des intervalles pour les ensembles de départ et d'arrivée de ces quatre applications.

Exercice 6 (Bijectivité par le théorème des valeurs intermédiaires)
Soit f la fonction $x \mapsto x^3 - x^2 + x + 1$.

1. Soit $y \in \mathbb{R}$. Est-il possible de résoudre explicitement l'équation $f(x) = y$?

2. En factorisant l'expression de f par x^3, déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
3. Montrer que l'équation $f(x) = y$ d'inconnue réelle x admet une unique solution que l'on ne cherchera pas à expliciter. En déduire que f réalise une bijection (encore notée f) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
4. Écrire une fonction python `graphe` de paramètres `a,b` qui affiche la courbe de f sur $[a, b]$ et celle de f^{-1} sur $f([a, b])$.
5. En revenant à la définition, démontrer que f^{-1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7 (Les ensembles de départ et d'arrivée ne sont pas inclus dans $\mathbb{R}$)
Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?
Dans ce dernier cas, donner l'expression de sa bijection réciproque.
On écrira également une fonction python `f_1` de paramètres x et y qui renvoie $f_1(x, y)$.

1. $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, 2x-y) \end{array}$
2. $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x-2y, -2x+4y) \end{array}$

Exercice 8 (Bijectivité et imparité)
Montrer que si f est impaire et réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ alors f^{-1} est impaire.

Exercice 9 (Propriété caractéristique de la bijectivité)
Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

1. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
2. Déterminer $f([-2,\ 2])$ et $f\left(\left[\frac{2}{5},\ 3\right]\right)$ à l'aide du tableau de variation de f.
3. Déterminer l'image directe de $\mathbb{R}$ par f. Qu'en déduit-on pour f ?
4. Justifier que l'application : $\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}\right.$ est bien définie.
   Quelle propriété possède cette application ?
5. Déterminer le nombre d'antécédents de chaque élément de $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ par f.
   Qu'en déduit-on pour f ?
6. Déterminer les antécédents de $\frac{1}{4}$ par f et retrouver le résultat de la question 5.
7. La restriction de f à $[-1,\ 1]$ est-elle bijective, injective ?
8. Justifier, à l'aide d'une question précédente,
   que l'application $g : \left|\begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}\right.$ est bien définie.
9. Montrer que $h : \left|\begin{array}{ccc} \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] & \longrightarrow & [-1,1] \\ y & \longmapsto & \begin{cases} \frac{1-\sqrt{1-4y^2}}{2y} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases} \end{array}\right.$ est bien définie.
10. Déterminer les applications $g \circ h$ et $h \circ g$. Qu'en déduit-on ?
11. Tracer les courbes de g et h à la main et avec un programme python.