Écriture algébrique, parties réelle et imaginaire, conjugaison, module

Exercice 1
Mettre sous la forme algébrique ($a+ib$ avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$) les nombres complexes suivants :
$z_1=(1+\mathrm{i})^3$; $z_2=\dfrac{(1+\mathrm{i})^2}{1-\mathrm{i}}$; $z_3=\dfrac{(1-\mathrm{i})^2}{1+\mathrm{i}}$; $z_4=\dfrac{1}{(1+2\mathrm{i})(3-\mathrm{i})}$; $z_5=\left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}\right)^2$.
On pensera à la formule du binôme pour z_1.
Avant de se lancer dans le calcul de z_3, on cherchera une relation simple entre z_3 et z_2.

Exercice 2
Trouver tous les nombres complexes x et y tels que :

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccc}(1-\mathrm{i})x & + & (2-\mathrm{i})y & = & 3+2\mathrm{i}\\ (2-2\mathrm{i})x & - & (1+\mathrm{i})y & = & 5-\mathrm{i}\end{array}\right.$$

Exercice 3
Résoudre les équations d'inconnue complexe z suivantes :

$$\mathrm{Im}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)=0 \quad \text{et} \quad \mathrm{Re}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)=0.$$

Exercice 4
Soit $(x,y)\in\mathbb{C}^2$. Démontrer que si $\begin{cases}|x|=|y|=1\\ \overline{x}\neq y\\ \overline{x}\neq -y\end{cases}$ alors $\dfrac{x+y}{1-xy}\in\mathrm{i}\mathbb{R}$ et $\dfrac{x+y}{1+xy}\in\mathbb{R}$.
On commencera par démontrer que $\dfrac{x+y}{1-xy}$ et $\dfrac{x+y}{1+xy}$ sont bien définis.
Indication. Il y a deux méthodes :
* Calcul des conjugués de $\dfrac{x+y}{1-xy}$ et $\dfrac{x+y}{1+xy}$.
* Calcul de $\dfrac{x+y}{1-xy}$ et $\dfrac{x+y}{1+xy}$ en remplaçant x et y par leurs écritures exponentielles.

Exercice 5
On note U l'ensemble des nombres complexes de module strictement inférieur à 1 et a un élément de U.

1. Montrer que pour tout $z\in U$, on a $1-\overline{a}z\neq 0$.
   Indication : on comparera les modules de 1 et de $\overline{a}z$.
2. Soit $(x,y)\in[0,1[^2$. À l'aide d'une factorisation, démontrer que $1+xy-x-y>0$.
3. Montrer que pour tout $z\in U$, on a $\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}\in U$.
   Indication : on pourra chercher le signe de $|1-\overline{a}z|^2-|z-a|^2$.
4. Montrer que l'application $L_a : U\longrightarrow U$ définie par $L_a(z)=\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}$ est une bijection de U sur U. Déterminer son application réciproque.
   Existe-t-il un nombre complexe $c\in U$ tel que $(L_a)^{-1}=L_c$?

Exercice 6
1. Démontrer que pour tout couple de complexes (u,v) on a :

$$|u+v|^2+|u-v|^2=2(|u|^2+|v|^2) \qquad \text{(identité du parallélogramme)}$$

2. En déduire :

$$|u|+|v|\leqslant|u+v|+|u-v|$$

   Donner une interprétation de cette inégalité dans le plan complexe.

Exercice 7
Déterminer z pour que z, $z-1$ et $\frac{1}{z}$ aient même module.
Indication : On montrera que $|z|=1$ et que $Re(z)=\frac{1}{2}$.

Écriture exponentielle et argument

Exercice 8
Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :
$z_1=3+3i$, $z_2=-1-\mathrm{i}\sqrt{3}$, $z_3=-\frac{4}{3}\mathrm{i}$, $z_4=-2$, $z_5=\left(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$,
$z_6=\left(\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1-\mathrm{i}}\right)^{20}$, $z_7=\frac{(-1-\mathrm{i})^9}{(1-\mathrm{i})^7}$, $z_8=\left(\frac{1+\mathrm{i}-\sqrt{3}(1-\mathrm{i})}{1+\mathrm{i}}\right)^2$, $z_9=e^{e^{\mathrm{i}\alpha}}$

Exercice 9
On pose $u=\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{7}}$, $S=u+u^2+u^4$ et $T=u^3+u^5+u^6$.

1. Montrer que S et T sont conjugués et que la partie imaginaire de S est positive.
2. Calculer $S+T$ et ST. En déduire S et T.

Exercice 10
Écrire l'expression $1+\cos\phi+i\sin\phi$ sous la forme $a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $(a,\theta)\in\mathbb{R}^2$.
Indication : On pourra mettre sous forme exponentielle le nombre $\cos\phi+i\sin\phi$.
En déduire l'expression de $(1+\cos\phi+\mathrm{i}\sin\phi)^n$ pour $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 11
Soit $x=1+\mathrm{i}$, $y=\sqrt{3}-\mathrm{i}$ et $z=xy$. Mettre sous forme exponentielle les nombres x,y et z. En déduire $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 12

Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z^2 \end{array} \right.$. Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f.

Équations d'inconnue complexe

Exercice 13 (Solutions de $z^2 = a$, $z^3 = a$, $z^4 = a$)

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = 1 + \mathrm{i}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 4(\sqrt{3} + \mathrm{i})$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = 3(1 + \mathrm{i}\sqrt{3})$.

Exercice 14

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
   Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation $(E_\alpha)\quad z^2 - 2\cos(\alpha)z + 1 = 0$ d'inconnue complexe z.
2. Trouver l'ensemble des points du plan complexe dont les affixes sont les solutions de (E_α) lorsque α parcourt l'intervalle $[0, \pi]$.
3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer l'ensemble des solutions complexes pour chacune des équations suivantes.
   (a) $(F_\alpha)\quad z^4 - 2\cos(\alpha)z^2 + 1 = 0$.
   (b) $(G_\alpha)\quad z^6 - 2\cos(\alpha)z^3 + 1 = 0$.
   (c) $(H_\alpha)\quad z^8 - 2\cos(\alpha)z^4 + 1 = 0$.

Sommes trigonométriques et sommes de nombres complexes

Exercice 15

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose : $C_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos kx$ et $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin kx$.

1. Préciser les valeurs de $C_n(x)$ et $S_n(x)$ lorsque x est multiple de 2π.
2. On suppose que x n'est pas un multiple de 2π. Calculer $C_n(x) + iS_n(x)$.
   En déduire les valeurs de $C_n(x)$ et $S_n(x)$.
3. Simplifier les sommes suivantes : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin^2(kx)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos^2(kx)$.

Exercice 16

Soient α et β deux nombres réels. Calculer $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \cos\big(p\alpha + (n-p)\beta\big)$.

Exercice 17

1. Démontrer que : $\forall p \in \mathbb{N}, \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{2p+1} k\mathrm{i}^{k-1} = (p+1)(-1)^p + \frac{1 - (2p+1)(-1)^p}{2}\mathrm{i}$.
2. En déduire les expressions avec et sans $\sum$ des sommes réelles :
   $S_1 = 1 - 3 + 5 - 7 + \cdots + (-1)^p(2p+1)$ et $S_2 = 2 - 4 + 6 - 8 + \cdots + (-1)^{p-1}2p$.

Exercice 18

1. Développer $(1 + \mathrm{i})^{2n}$.
2. En déduire la valeur de $S_1(n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}(-1)^k$ et $S_2(n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1}(-1)^k$.

Application des nombres complexes aux transformations trigonométriques

Exercice 19 (Linéarisation)

Linéariser $\sin x \cos^3 x$, $\cos^4 x$, $\sin^5 x$ et $\cos(2x)\sin^3(x)$.

Exercice 20 (Les six premiers polynômes de Tchebychev)

Pour tout $n \in [\![0, 5]\!]$, déterminer un polynôme P_n de degré n tel que $\cos(nx) = P_n(\cos x)$.
Indication : pour $n \geqslant 3$ on commencera par représenter le triangle de Pascal jusqu'à la ligne 5 puis on écrira $\cos(nx) = \mathrm{Re}\big(\mathrm{e}^{inx}\big)$.