

Suites arithmétiques et géométriques

Exercice 1

Soit u la suite définie par : $\forall n \geq 0, u_{n+1} = 2u_n + n$ et $u_0 = 1$.

- Écrire une fonction python `suite_u` d'argument `n` qui renvoie u_n .
Sachant que $u_{20} = 2097131$, que peut-on conjecturer pour la limite de (u_n) ?
- Écrire une fonction python `seuil` d'argument `a` qui renvoie le plus petit entier n tel que $u_n \geq a$ sans utiliser la fonction précédente.
- Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 2^n$. Qu'en déduit-on pour la limite de (u_n) ?
- Montrer qu'il existe un couple de réels (a, b) tel que la suite $w_n = an + b$ vérifie la relation $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = 2w_n + n$.
- Montrer que la suite $z_n = u_n - an - b$ est géométrique.
- En déduire l'expression de z_n puis de u_n en fonction de n . Retrouver $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 2

On considère la suite définie par $u_0 = -3$ et, pour tout entier naturel $n, u_{n+1} = \frac{u_n - 8}{2u_n - 9}$.

- Étudier les variations de f définie par $f(x) = \frac{x-8}{2x-9}$ sur son ensemble de définition.
- Résoudre l'équation $f(x) = x$. Les solutions de cette équation sont appelées points fixes de la fonction f , expliquer pourquoi. On notera α et β les deux points fixes de f avec $\alpha < \beta$.
- Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n < 1$.
- Justifier que l'on peut définir une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant $v_n = \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$.
- Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
- En déduire l'expression de v_n en fonction de n , puis celle de u_n en fonction de n .
- Déterminer la limite de (u_n) . Que constate-t-on ?
- Écrire une fonction python `limite` de paramètre `p` qui renvoie u_n où n est le plus petit entier tel que $|u_n - u_{n+1}| \leq p$.
- Écrire une fonction python `seuil` de paramètre `p` qui renvoie le plus petit entier n tel que $|u_n - u_{n+1}| \leq p$.

Exercice 3

On considère la suite définie par $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel $n, u_{n+1} = \frac{2u_n - 1}{u_n + 4}$.

- Étudier les variations de f définie par $f(x) = \frac{2x-1}{x+4}$ sur son ensemble de définition.
- Résoudre l'équation $f(x) = x$. On notera α le point fixe de f .
- Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n > -1$.
- Justifier que l'on peut définir une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant $v_n = \frac{1}{u_n - \alpha}$.
- Montrer que la suite (v_n) est arithmétique.
- En déduire l'expression de v_n en fonction de n , puis celle de u_n en fonction de n .
- Déterminer la limite de (u_n) . Que constate-t-on ?

Suites arithmético-géométriques (SAG)

Exercice 4

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite satisfaisant la relation : $\forall n \geq 0, u_{n+1} = 2u_n + 5^n$.

Pour expliciter le terme général de cette suite, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}, \alpha_n = \frac{u_n}{5^n}$.

- Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_{n+1} = \frac{2}{5}\alpha_n + \frac{1}{5}$.
- En déduire l'expression de α_n puis celle de u_n en fonction de n et u_0 .
- Sans utiliser les questions précédentes, montrer que (u_n) est une SRL2.

Exercice 5

On considère une suite vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = e\sqrt{u_n}$ et $u_0 > 0$.

- Écrire une fonction python `limite` d'arguments `p` et `u0` qui renvoie u_n où n est le plus petit entier tel que $|u_n - u_{n+1}| \leq p$.
`limite(1/1000000, 10)` renvoie 7.389057165051936 et
`limite(1/1000000, 1)` renvoie 7.389054337242604. Que peut-on conjecturer ?
- Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.
On introduit la suite auxiliaire t définie par $t_n = \ln u_n$.
- Justifier que la suite t est bien définie et arithmético-géométrique.
- En déduire l'expression de t_n en fonction de n, t_0 puis de u_n en fonction de n, u_0 .
En déduire la convergence et la limite de la suite u .

Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 (SRL2)

Exercice 6

- Montrer que les suites (u_n) vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$ sont bornées.
- Quel est le point commun des suites vérifiant $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$?

3. Quelle condition doivent satisfaire u_0 et u_1 pour qu'une suite vérifiant $u_{n+2} = -2u_{n+1} - u_n$ soit bornée?

Exercice 7

On considère deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - v_n \\ v_{n+1} = u_n + 4v_n \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_0 = 2 \\ v_0 = -1 \end{cases}$$

Préliminaires informatiques.

Coder une fonction `suites_uv` d'argument `n` qui renvoie u_n, v_n .

`suites_uv(10)` renvoie $(-78732, 137781)$ alors que `suites_uv(11)` renvoie $(-295245, 472392)$. Que peut-on conjecturer?

Première méthode.

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont récurrentes linéaires d'ordre 2. En déduire les expressions de v_n et de u_n en fonction de n .

Seconde méthode.

- On considère (p_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}, p_n = u_n + v_n$.
Montrer que la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique.
En déduire l'expression de p_n en fonction de n .
- À l'aide de la question précédente, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 3v_n + 3^n$.
- Montrer que la suite $z_n = \frac{v_n}{3^n}$ est arithmétique.
En déduire l'expression de z_n en fonction de n .
- Donner enfin l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n .

Exercice 8

Soit u la suite vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \sqrt{u_n u_{n+1}}, u_0 > 0$ et $u_1 > 0$.

- Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$. On considère la suite w définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \ln u_n$. Justifier que (w_n) est bien définie.
- Montrer que la suite w est récurrente linéaire d'ordre 2.
- Expliciter w_n en fonction de n, w_1, w_0 et en déduire sa limite en $+\infty$.
- Calculer alors la limite de u en fonction de u_0, u_1 .

Exercice 9 (Suite de Fibonacci)

Soit $(\phi_n)_n$ la suite réelle définie par : $\begin{cases} \phi_0 = 0, \phi_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \phi_{n+2} = \phi_{n+1} + \phi_n \end{cases}$

- Calculer ϕ_n en fonction de n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}, \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \in \mathbb{N}$.

- Calculer $\sum_{k=0}^n \phi_k$.

- (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \phi_{n+2}^2 - \phi_{n+1}\phi_{n+3} = -(\phi_{n+1}^2 - \phi_n\phi_{n+2})$.
(b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, \phi_{n+1}^2 - \phi_n\phi_{n+2} = (-1)^n$.

- Déterminer et interpréter la limite de $\left(\frac{\phi_{n+1}}{\phi_n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

- Écrire une fonction Python `fibonacci` de paramètre n qui renvoie $\phi_n, \frac{\phi_n}{v_n}, \phi_n - v_n$ où $v_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n$.
`fibonacci(40)` renvoie $(102334155, 0.99999999999999987, -1.341104507446289e-07)$
Que peut-on conjecturer?

- On note $u_n = \sum_{k=0}^n \binom{n-k}{k}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \phi_{n+1}$.

Exercice 10

On s'intéresse dans cet exercice aux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant pour tout entier n la relation de récurrence (R) : $2u_{n+2} - u_{n+1} - 3u_n = 4n - 8$.

- Déterminer une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui soit arithmétique et vérifie la relation (R) pour tout entier n .
- Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie (R) pour tout entier n si et seulement si la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_n - v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie pour tout entier n la relation (R') : $2w_{n+2} - w_{n+1} - 3w_n = 0$.
- Déterminer l'ensemble des suites vérifiant la relation (R') pour tout entier n .
- En déduire l'ensemble des suites vérifiant la relation (R) pour tout entier n .
- Montrer que l'unique suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, 2u_{n+2} - u_{n+1} - 3u_n = 4n - 8 \\ u_0 = 1 \\ u_1 = -2 \end{cases} \quad \text{est définie par}$$

$$u_n = 1 - 2n + \frac{2}{5} \left[(-1)^n - \left(\frac{3}{2} \right)^n \right] \quad \text{pour tout entier } n. \text{ Calculer la limite de } (u_n).$$

- Calculer $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ où $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite définie dans la question précédente.
En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.