Mathématiques

Devoir surveillé n° 3

Lycée THIERS
Année 23-24

1BCPST 2

2 décembre 2023
Durée : 3h

Qualité de la rédaction, clarté des raisonnements, présentation, orthographe et ponctuation font partie des critères de notation. Il est vivement recommandé de lire attentivement les questions et d'*encadrer les résultats*. L'usage des calculatrices est ***interdit***.

Exercice 1. *La trigo dans tous ses états*

1. Le but de cette question est de résoudre l'équation $(E) : \cos(3\theta) = 4\cos^2(\theta)$ d'inconnue θ.
   (a) Rappeler les formules donnant $\cos(x+y)$, $\cos(2\theta)$ et $\sin(2\theta)$, pour des réels x, y et θ quelconques.
   (b) Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos(3\theta) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)$.
   (c) Résoudre l'équation $4x^3 - 4x^2 - 3x = 0$ d'inconnue x.
   (d) En déduire que θ est solution de (E) si et seulement si $\cos(\theta) \in \left\{0, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\}$.
   (e) Résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{R}$ et expliciter les solutions appartenant à l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

2. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(3x) = \cos(x) - 4\cos(x)\sin^2(x)$.
   Indication : on pourra utiliser une relation établie à une question précédente.
   (b) En déduire une expression de $\cos(x)\sin^2(x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\cos(3x)$.
   (c) Clore la somme $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\pi}{3^k}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{3^k}\right)$ pour tout entier naturel non nul n.
   (d) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} T_n = \frac{1}{2}$.
   (e) Sans utiliser les résultats des questions précédentes, écrire une fonction python `somme` de paramètre `n` qui renvoie la valeur de T_n. On suppose exécutée la commande `import math as m`.
   (f) Écrire une fonction python `seuil` d'argument `p` qui renvoie le plus petit entier n tel que $\left|T_n - \frac{1}{2}\right| \leqslant p$. Cette fonction devra appeler la fonction `somme`.
   (g) Écrire une fonction python `seuilBis` d'argument `p` qui renvoie le plus petit entier n tel que $\left|T_n - \frac{1}{2}\right| \leqslant p$. Cette fonction ne devra pas appeler la fonction `somme`.

Exercice 2. *Comparaison d'une suite avec une suite géométrique*

Soit la suite $(u_n)_n$ définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = 2u_n + \frac{1}{n+1}$ et le premier terme $u_0 = 1$.

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 2^n$. En déduire la limite de la suite (u_n).
2. Écrire une fonction python `seuil` de paramètre `a` qui renvoie le plus petit entier n tel que $u_n > a$.

Exercice 3. *Quelques sommes*

1. Clore la somme double $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} \frac{i^2}{j}$.

2. Clore la somme double $T_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} \frac{i}{j}$.

3. On considère la somme $U_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i2^i$.
   (a) Montrer que $U_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} 2^i$.
   (b) En déduire une expression de U_n n'utilisant pas le symbole $\sum$.

4. Simplifier au maximum la somme $V_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1} \binom{2n}{k} 2^k$.

Exercice 4. *Le sinus hyperbolique*

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Soit x et y dans $\mathbb{R}$. Montrer que l'équation $f(x) = y$ est équivalente à $X^2 - 2yX - 1 = 0$ avec $X = \mathrm{e}^x$.
3. Montrer que l'équation $X^2 - 2yX - 1 = 0$ d'inconnue X admet deux solutions X_1 et X_2 que l'on exprimera en fonction de y avec $X_1 < X_2$.
4. Montrer que $\sqrt{y^2+1} > |y|$. En déduire que $X_1 < 0$ et $X_2 > 0$.
5. Donner les éventuelles solutions pour chacune des équations $\mathrm{e}^x = X_1$ et $\mathrm{e}^x = X_2$ et en déduire les éventuelles solutions de l'équation $f(x) = y$.
6. Justifier que f réalise une bijection entre deux intervalles que l'on déterminera puis donner l'expression de $f^{-1}(y)$.
7. Écrire une fonction python `courbes` d'arguments `a,b` qui affiche la courbe de f sur $[a, b]$ et la courbe de f^{-1} sur $f([a, b])$ sans utiliser l'expression analytique de f^{-1}. On pensera à importer les bibliothèques nécessaires.

Exercice 5. *Équation trigonométrique avec une somme*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On cherche à résoudre sur $]0, 2\pi[$ l'équation d'inconnue x : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = -\frac{1}{2}$

1. Soient a et b deux réels. Exprimer $\sin(a + b) - \sin(a - b)$ uniquement en fonction de $\cos(a)$ et $\sin(b)$.
2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in]0, 2\pi[$:
   $$2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{k=1}^{n}\cos(kx) = \sum_{k=1}^{n}\left[\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right) - \sin\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right)\right]$$
3. En déduire que : $\forall x \in]0, 2\pi[$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos(kx) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right) = 0$
4. Conclure.

Exercice 6. *Injection, surjection, bijection*

Déterminer quatre applications f_1, f_2, f_3, f_4 d'expression analytique x^2 telles que f_1 ne soit ni injective ni surjective, f_2 soit injective mais pas surjective, f_3 soit surjective mais pas injective, f_4 soit bijective.
On justifiera les réponses.