Mathématiques

Lycée THIERS
Année 23-24

Devoir surveillé n° 3

1BCPST 2

2 décembre 2023
Durée : 3h

Qualité de la rédaction, clarté des raisonnements, présentation, orthographe et ponctuation font partie des critères de notation. Il est vivement recommandé de lire attentivement les questions et d'*encadrer les résultats*. L'usage des calculatrices est ***interdit***.

Exercice 1. *La trigo dans tous ses états*

1. (a) $\boxed{\cos(x+y) = \cos(x)\,\cos(y) - \sin(x)\,\sin(y)}$

$\boxed{\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1 = 1 - 2\sin^2(\theta)}$

$\boxed{\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\,\cos(\theta)}$

(b) Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

Première méthode : en utilisant les formules de trigonométrie

$$\begin{aligned}\cos(3\theta) &= \cos(2\theta+\theta) = \cos(2\theta)\,\cos(\theta) - \sin(2\theta)\,\sin(\theta)\\ &= \left(2\cos^2(\theta)-1\right)\,\cos(\theta) - 2\sin(\theta)\,\cos(\theta)\,\sin(\theta)\\ &= 2\cos^3(\theta) - \cos(\theta) - 2\sin^2(\theta)\cos(\theta)\\ &= 2\cos^3(\theta) - \cos(\theta) - 2\left(1-\cos^2(\theta)\right)\,\cos(\theta)\\ &= 2\cos^3(\theta) - \cos(\theta) - 2\cos(\theta) + 2\cos^3(\theta)\end{aligned}$$

$$\boxed{\cos(3\theta) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)}$$

Deuxième méthode : en linéarisant $4\cos^3(\theta)$

$$\begin{aligned}4\cos^3(\theta) &= 4\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2}\right)^3 = \frac{4}{2^3}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\theta} + 3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\theta}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} + 3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}3\theta}\right)\\ &= \tfrac{1}{2}\Big(\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}3\theta}\right) + 3\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)\Big) = \tfrac{1}{2}\left(2\cos(3\theta) + 6\cos(\theta)\right)\\ &= \cos(3\theta) + 3\cos(\theta)\end{aligned}$$

$$\boxed{\cos(3\theta) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)}$$

(c) $4x^3 - 4x^2 - 3x = 0 \iff x\left(4x^2 - 4x - 3\right) = 0$

$4x^3 - 4x^2 - 3x = 0 \iff x = 0$ ou $4x^2 - 4x - 3 = 0$

Le discriminant du trinôme $4x^2 - 4x - 3$ est $16 + 48 = 64 = 8^2$. Ses racines sont $x_1 = \dfrac{4-8}{8} = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = \dfrac{4+8}{8} = \frac{3}{2}$.

$$\boxed{4x^3 - 4x^2 - 3x = 0 \iff x \in \left\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2}\right\}}$$

(d) θ est solution de (E) $\iff$ $4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta) = 4\cos^2(\theta)$ d'après la question 2

θ est solution de (E) $\iff$ $4X^3 - 4X^2 - 3X = 0$ en posant $X = \cos(\theta)$

θ est solution de (E) $\iff$ $X \in \left\{0, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right\}$ d'après la question 4

$$\boxed{\theta \text{ est solution de } (E) \text{ si et seulement si } \cos(\theta) \in \left\{0, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\}.}$$

(e) $\boxed{\cos(\theta) = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \dfrac{\pi}{2} + k\pi}$

$\boxed{\cos(\theta) = -\dfrac{1}{2} \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } \theta = -\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi}$

$\boxed{\cos(\theta)=\dfrac{3}{2} \text{ n'a pas de solution car cos prend ses valeurs dans } [-1,1] \text{ et } \dfrac{3}{2}\notin[-1,1].}$

D'après les questions précédentes, $\boxed{\mathscr{S}_E = \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\dfrac{2\pi}{3} + k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\dfrac{2\pi}{3} + k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}}$

$\boxed{\text{Les solutions de } (E) \text{ dans } [-\pi,\pi] \text{ sont } \dfrac{\pi}{2},\ -\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{2\pi}{3} \text{ et } -\dfrac{2\pi}{3}.}$

2. (a) On a vu dans une question précédente que pour tout $\theta\in\mathbb{R}$, $\cos(3\theta) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)$
Donc pour un x quelconque dans $\mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned}\cos(3x) &= 4\cos^3(x) - 3\cos(x) = 4\cos(x)\cos^2(x) - 3\cos(x) = 4\cos(x)\left(1-\sin^2(x)\right) - 3\cos(x)\\ &= 4\cos(x) - 4\cos(x)\sin^2(x) - 3\cos(x) = \cos(x) - 4\cos(x)\sin^2(x)\end{aligned}$$

$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \cos(3x) = \cos(x) - 4\cos(x)\sin^2(x)}$

(b) Soit $x\in\mathbb{R}$.
En ajoutant $4\cos(x)\sin^2(x) - \cos(3x)$ aux deux membres de l'égalité de la question précédente, on trouve $4\cos(x)\sin^2(x) = \cos(x) - \cos(3x)$

$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \cos(x)\sin^2(x) = \dfrac{1}{4}\big(\cos(x) - \cos(3x)\big)}$

On peut aussi obtenir cette relation par linéarisation sans utiliser la question précédente :

$$\begin{aligned}\cos(x)\sin^2(x) &= \left(\tfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)\left(\tfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2 = \left(\tfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)\left(\tfrac{e^{i2x}-2e^{ix}e^{-ix}+e^{-i2x}}{-4}\right)\\ &= -\tfrac{1}{8}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\left(e^{i2x}-2+e^{-i2x}\right)\\ &= -\tfrac{1}{8}\left(e^{i3x}-2e^{ix}+e^{-ix}+e^{ix}-2e^{-ix}+e^{-i3x}\right)\\ &= -\tfrac{1}{8}\left(\left[e^{i3x}+e^{-i3x}\right]-\left[e^{ix}+e^{-ix}\right]\right)\\ &= -\tfrac{1}{8}\big(2\cos(3x)-2\cos(x)\big)\end{aligned}$$

On a démontré que $\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \cos(x)\sin^2(x) = \dfrac{1}{4}\big(\cos(x) - \cos(3x)\big)}$

(c) Soit $(k,n)\in(\mathbb{N}^*)^2$. On remplace x par $\frac{\pi}{3^k}$ dans l'égalité établie à la question précédente :
$\cos\left(\frac{\pi}{3^k}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{3^k}\right) = \frac{1}{4}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3^k}\right) - \cos\left(3\frac{\pi}{3^k}\right)\right) = \frac{1}{4}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3^k}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3^{k-1}}\right)\right)$
Additionnons les égalités précédentes pour $k\in[\![1,n]\!]$:

$$\begin{aligned}T_n &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3^k}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3^{k-1}}\right)\right)\\ &= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3^k}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3^{k-1}}\right)\right) \text{ on reconnait une somme télescopique}\\ &= \frac{1}{4}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3^n}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3^0}\right)\right) \text{ par télescopage}\\ &= \frac{1}{4}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3^n}\right) + 1\right)\end{aligned}$$

Autre méthode de calcul :

$$\begin{aligned}T_n &= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\pi}{3^k}\right) - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\pi}{3^{k-1}}\right) \text{ chgt indice } i=k-1 \text{ dans le 2}^{\text{e}} \textstyle\sum\\ &= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\pi}{3^k}\right) - \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{n-1}\cos\left(\frac{\pi}{3^i}\right)\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3^n}\right) + \cancel{\sum_{k=1}^{n-1} \cos\left(\frac{\pi}{3^k}\right)}\right) - \frac{1}{4}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3^0}\right) + \cancel{\sum_{i=1}^{n-1} \cos\left(\frac{\pi}{3^i}\right)}\right) \text{ par décrochage}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3^n}\right) + 1\right) \text{ car } \cos(\pi) = -1$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\pi}{3^k}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{3^k}\right) = \frac{1}{4}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3^n}\right) + 1\right)}$$

(d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\pi}{3^n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{\pi}{3^n}\right) = \cos(0) = 1$. Par somme et produit on obtient :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\pi}{3^k}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{3^k}\right) = \frac{1}{4}(1+1) = \frac{1}{2}}$$

(e)
```
import math as m
def somme(n):
    s=0
    for k in range(1,n+1):
        a = m.pi/3**k
        s+=m.cos(a)*m.sin(a)**2
    return s
```

(f)
```
def seuil(p):
    n=1
    while abs(somme(n)-1/2)>p:
        n+=1
    return n
```

(g)
```
def seuilBis(p):
    n,s = 1,3/8
    while abs(s-1/2)>p:
        n += 1
        a = m.pi/3**n
        s += m.cos(a)*m.sin(a)**2
    return n
```

Autre version qui ne nécessite pas le calcul du premier terme de la somme :

```
def seuilTer(p):
    n,s,test = 0,0,True
    while test:
        n += 1
        a = m.pi/3**n
        s += m.cos(a)*m.sin(a)**2
        test = abs(s-1/2)>p
    return n
```

Exercice 2. *Comparaison d'une suite avec une suite géométrique*

1. Soit $\mathscr{P}(n)$ la propriété : $u_n \geqslant 2^n$.

   Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 2^n$.

Initialisation

$u_0 = 1$ et $2^0 = 1$ d'où $\mathscr{P}(0)$.

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n \geqslant 2^n$ et démontrons que $u_{n+1} \geqslant 2^{n+1}$.
Par produit, $2u_n \geqslant 2 \times 2^n = 2^{n+1}$
$n \geqslant 0$ donc $n+1 > 0$ et $\frac{1}{n+1} > 0$.
Par somme membre à membre, $u_{n+1} = 2u_n + \frac{1}{n+1} \geqslant 2^{n+1}$ d'où $\mathscr{P}(n+1)$

Conclusion

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\, u_n \geqslant 2^n}$

On sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$ donc par comparaison $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$

2.
```
def u(n):
    v=1
    for k in range(n):
        v = 2*v+1/(k+1)
    return v
```

```
def seuil(a):
    n = 0
    while u(n)<=a:
        n += 1
    return n
```

On pouvait opter pour une version n'utilisant pas la fonction `u` :

```
def seuilBis(a):
    n,v = 0,1
    while v<=a:
        n,v = n+1,2*v+1/(n+1)
    return n
```

Exercice 3. *Quelques sommes*

1. $S_n = \sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum\limits_{i \leqslant j \leqslant n} \frac{i^2}{j} = \sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{i^2}{j} = \sum\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant j} \frac{i^2}{j} = \sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{j} \frac{i^2}{j} = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \sum\limits_{i=1}^{j} i^2$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\cancel{j}} \frac{\cancel{j}(j+1)(2j+1)}{6} = \frac{1}{6} \sum_{j=1}^{n} (j+1)(2j+1) = \frac{1}{6} \sum_{j=1}^{n} \left(2j^2 + 3j + 1\right)$$

$$= \frac{1}{6} \left(2 \sum_{j=1}^{n} j^2 + 3 \sum_{j=1}^{n} j + \sum_{j=1}^{n} 1 \right) = \frac{1}{6} \left(2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 3 \frac{n(n+1)}{2} + n \right)$$

$$\boxed{S_n = \frac{2n(n+1)(2n+1) + 9n(n+1) + 6n}{36}}$$

Après factorisation par n et simplification, on trouve $\boxed{S_n = \frac{n\left(4n^2 + 15n + 17\right)}{36}}$

2. En décrochant le dernier terme de la somme de gauche, on trouve :
$T_n = \displaystyle\sum_{j=n+1}^{n} \frac{i}{j} + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} \frac{i}{j}$ or par convention $\displaystyle\sum_{j=n+1}^{n} \frac{i}{j} = 0$ donc $T_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} \frac{i}{j}$
$$T_n = \sum_{1\leqslant i<n}\sum_{i<j\leqslant n} \frac{i}{j} = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \frac{i}{j} = \sum_{2\leqslant j\leqslant n}\sum_{1\leqslant i<j} \frac{i}{j} = \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} \frac{i}{j} = \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j-1} i$$
$= \displaystyle\sum_{j=2}^{n} \frac{1}{\cancel{j}} \frac{(j-1)\cancel{j}}{2} = \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n}(j-1) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} k$ avec le changement d'indice $k = j-1$
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{(n-1)n}{2}$ donc $\boxed{T_n = \dfrac{n(n-1)}{4}}$

3. (a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} 2^i = \sum_{i=1}^{n} i2^i$ car 2^i ne dépend pas du compteur j et la somme $\displaystyle\sum_{j=1}^{i} 2^i$ possède i termes.

   On a bien montré que $\boxed{U_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} 2^i}$

   (b) $U_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} 2^i = \sum_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{1\leqslant j\leqslant i} 2^i = \sum_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} 2^i = \sum_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{j\leqslant i\leqslant n} 2^i = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} 2^i$
   $= \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{2^{n+1}-2^j}{2-1} = \sum_{j=1}^{n} 2^{n+1} - 2^j = \sum_{j=1}^{n} 2^{n+1} - \sum_{j=1}^{n} 2^j = n2^{n+1} - \frac{2^{n+1}-2}{2-1}$
   $= n2^{n+1} - (2^{n+1}-2) = n2^{n+1} - 2^{n+1} + 2$
   $\boxed{U_n = (n-1)2^{n+1} + 2}$

4. On reconnait la formule du binôme à condition de raccrocher le dernier terme.
$$V_n = -\binom{2n}{2n}2^{2n} + \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}2^k 1^{2n-k} = -\left(2^2\right)^n + (2+1)^{2n} = -4^n + 3^{2n} = -4^n + \left(3^2\right)^n = -4^n + 9^n$$
$\boxed{V_n = 9^n - 4^n}$

Exercice 4. *Le sinus hyperbolique*

1. La fonction exponentielle étant définie sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $\boxed{\mathscr{D}_f = \mathbb{R}}$
2. En posant $X = \mathrm{e}^x$ et en remarquant que $\mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{\mathrm{e}^x} = \frac{1}{X}$ on a :
$f(x) = y \iff \frac{X-\frac{1}{X}}{2} = y \iff X - \frac{1}{X} = 2y \iff X^2 - 1 = 2yX$ car $\mathrm{e}^x \neq 0$
On en déduit que $\boxed{f(x) = y \iff X^2 - 2yX - 1 = 0 \text{ avec } X = \mathrm{e}^x.}$
3. Le discriminant du polynôme $X^2 - 2yX - 1$ est égal à $\Delta = (-2y)^2 - 4(-1) = 4y^2 + 4 = 4(y^2+1) > 0$.
Ses racines sont $X_1 = \frac{2y-\sqrt{4(y^2+1)}}{2} = \frac{2y-\sqrt{4}\sqrt{y^2+1}}{2} = \frac{\cancel{2}\left(y-\sqrt{y^2+1}\right)}{\cancel{2}} = y - \sqrt{y^2+1}$ et $X_2 = y + \sqrt{y^2+1}$
$X_2 - X_1 = y + \sqrt{y^2+1} - \left(y - \sqrt{y^2+1}\right) = \cancel{y} + \sqrt{y^2+1} - \cancel{y} + \sqrt{y^2+1} = 2\sqrt{y^2+1} > 0$
On en déduit que :
$\boxed{\text{les solutions de l'équation } X^2 - 2yX - 1 = 0 \text{ sont } X_1 = y - \sqrt{y^2+1} \text{ et } X_2 = y + \sqrt{y^2+1} \text{ et } X_1 < X_2.}$

4. Soit $y \in \mathbb{R}$. Il est clair que $1 > 0$ donc $y^2 + 1 > y^2$ et $\sqrt{y^2+1} > \sqrt{y^2}$

On sait que $\sqrt{y^2} = |y|$ donc $\boxed{\forall y \in \mathbb{R},\ \sqrt{y^2+1} > |y|}$

On a l'équivalence $X_1 < 0 \iff y < \sqrt{y^2+1}$ or on sait que $\sqrt{y^2+1} > |y| \geqslant y$ donc on a $\boxed{X_1 < 0}$.

On a l'équivalence $X_2 > 0 \iff \sqrt{y^2+1} > -y$ or on sait que $\sqrt{y^2+1} > |y| \geqslant -y$ donc on a $\boxed{X_2 > 0}$.

5. La fonction exponentielle prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et $X_1 < 0$ donc

   $\boxed{\text{l'équation } \mathrm{e}^x = X_1 \text{ n'a pas de solution.}}$

   X_2 étant strictement positif, on a $\mathrm{e}^x = X_2 \iff x = \ln(X_2)$ donc

   $\boxed{\text{l'équation } \mathrm{e}^x = X_2 \text{ admet } \ln(X_2) \text{ comme unique solution.}}$

   D'après les questions précédentes, $f(x) = y \iff \mathrm{e}^x = X_1$ ou $\mathrm{e}^x = X_2 \iff x = \ln(X_2)$

   $\boxed{\text{l'équation } \varphi(x) = y \text{ admet } \ln(X_2) \text{ comme unique solution.}}$

6. D'après la question précédente, tout y réel admet un unique antécédent par f donc

   $\boxed{f \text{ réalise une bijection de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R} \text{ et } f^{-1}(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)}$

7.
```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
def courbes(a,b):
    x=np.linspace(a,b,200)
    y=(np.exp(x)-np.expo(-x))/2
    plt.plot(x,y)
    plt.plot(y,x)
    plt.axis("equal")
    plt.show()
```

Exercice 5. *Équation trigonométrique avec une somme*

1. $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$ et $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$

   Donc $\boxed{\sin(a+b) - \sin(a-b) = 2\sin(b)\cos(a).}$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, 2\pi[$.

   $2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{k=1}^{n}\cos(kx) = \sum_{k=1}^{n} 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos(kx)$

   D'après la question 1. avec $a = kx$ et $b = \frac{x}{2}$ on a donc

   $2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{k=1}^{n}\cos(kx) = \sum_{k=1}^{n}\left[\sin\left(kx + \frac{x}{2}\right) - \sin\left(kx - \frac{x}{2}\right)\right]$

   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in]0, 2\pi[,\ \ 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{k=1}^{n}\cos(kx) = \sum_{k=1}^{n}\left[\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right) - \sin\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right)\right]}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, 2\pi[$ Comme $\frac{x}{2} \in]0, \pi[$, $\sin\left(\frac{x}{2}\right) \neq 0$ donc d'après la question 2.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) &= \frac{1}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \sum_{k=1}^{n} \left[\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right) - \sin\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right)\right] \\
&= \frac{1}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \sum_{k=1}^{n} \left[\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right) - \sin\left(\left(k-1+\frac{1}{2}\right)x\right)\right] \\
&= \frac{1}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \left[-\sin\left(\left(1-1+\frac{1}{2}\right)x\right) + \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)\right] \quad \text{par télescopage} \\
&= \frac{1}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \left[-\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)\right]
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\forall x \in]0, 2\pi[\ ,\ \sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = -\frac{1}{2} \quad &\Leftrightarrow \frac{1}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \left[-\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)\right] = -\frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow -\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right) = -\sin\left(\frac{x}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in]0, 2\pi[\ ,\ \sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right) = 0}$$

4. On a donc, $\forall x \in]0, 2\pi[$,

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \sin\left(\tfrac{(2n+1)x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ \frac{(2n+1)x}{2} = k\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ x = \frac{2k\pi}{2n+1}$$

$$\boxed{\text{Ensemble des solutions : } \mathcal{S} = \left\{\frac{2k\pi}{2n+1},\ k \in \mathbb{Z}\right\}} \quad \text{OU } \mathcal{S} = \left\{\frac{4k\pi}{2n+1},\ \frac{2\pi+4k\pi}{2n+1},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

en écrivant $\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ \frac{(2n+1)x}{2} = 0 + 2k\pi$ ou $\frac{(2n+1)x}{2} = \pi + 2k\pi$

Exercice 6. *Injection, surjection, bijection*

La fonction $f : x \mapsto x^2$ est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.
Soit $y \in \mathbb{R}$, déterminons les éventuels antécédents de y par la fonction f. Pour cela résolvons l'équation $f(x) = y$.
$f(x) = y \iff x^2 = y$.

Premier cas : $y > 0$.

$x^2 = y \iff x = \sqrt{y}$ ou $x = -\sqrt{y}$

donc y admet exactement deux antécédents par f : $\sqrt{y} \in \mathbb{R}_+^*$ et $-\sqrt{y} \in \mathbb{R}_-^*$.

Deuxième cas : $y = 0$.

$x^2 = 0 \iff x = 0$

donc 0 admet un unique antécédent par f qui est 0.

Troisième cas : $y < 0$.

L'équation $x^2 = y$ n'a pas de solution car f prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$ (un carré est positif) et $y < 0$ donc y n'a pas d'antécédent par f.

On peut définir l'application $\boxed{f_1 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.}$ car la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

D'après la discussion précédente, 1 a deux antécédents (1 et -1) par f_1 donc $\boxed{f_1 \text{ n'est pas injective.}}$

Le nombre -1 n'a pas d'antécédent par f_1 donc $\boxed{f_1 \text{ n'est pas surjective.}}$

La restriction de f_1 à $\mathbb{R}_+$ est l'application $\boxed{f_2 : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.}$. Comme pour f_1, le nombre -1 n'a pas d'antécédent par f_2 donc $\boxed{f_2 \text{ n'est pas surjective.}}$
Plus généralement si $y \in \mathbb{R}_-^*$ alors y n'a pas d'antécédent par f_2.
0 a un unique antécédent par f_2 qui est 0.
Si $y > 0$ alors y a un unique antécédent par f_2 qui est $\sqrt{y}$ car $-\sqrt{y} \notin \mathbb{R}_+$.
On en déduit que $\boxed{f_2 \text{ est injective.}}$

La fonction f prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$ donc on peut définir l'application $\boxed{f_3 : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.}$. Comme pour f_1, le nombre 1 a deux antécédents (1 et -1) par f_3 donc $\boxed{f_3 \text{ n'est pas injective.}}$
Plus généralement, on peut affirmer que pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, $\sqrt{y}$ est un antécédent de y par f_3 donc $\boxed{f_3 \text{ est surjective.}}$

La restriction de f_3 à $\mathbb{R}_+$ est l'application $\boxed{f_4 : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.}$.
Pour tout $y > 0$ l'unique antécédent de y par f_4 est $\sqrt{y}$ car $-\sqrt{y} \notin \mathbb{R}_+$.
L'unique antécédent de 0 par f_4 est 0.
Par conséquent $\boxed{f_4 \text{ est une bijection.}}$