Exercice 1 (Primitivation et intégration à vue)
Dériver puis déterminer une primitive pour chacune des fonctions f suivantes en précisant l'intervalle de primitivation :

1. $f : x \longmapsto \dfrac{e^x}{e^x+1}$. En déduire $\displaystyle\int_0^2 \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$.
2. $f : x \longmapsto \dfrac{1}{e^x+1}$ on utilisera deux méthodes :
   (a) On multipliera en haut et en bas par e^{-x}.
   (b) On simplifiera $\dfrac{e^x}{e^x+1} + \dfrac{1}{e^x+1}$.
3. $f : x \longmapsto \dfrac{x+2}{x^2+4x+4}$. On pourra factoriser le dénominateur.
4. $f : x \longmapsto \cos(x)\sin^3(x)$. En déduire $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(x)\sin^3(x)\,dx$.
5. $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\cos^2\left(-x+\frac{\pi}{7}\right)}$
6. $f : t \longmapsto \tan^2\left(4t-\dfrac{\pi}{5}\right)$
7. $f : x \longmapsto 2^x$. En déduire $\displaystyle\lim_{u\to-\infty}\int_u^t 2^x dx$.
8. $f : x \mapsto \sin\left(\dfrac{\pi}{3}-2x\right)$. En déduire $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)\,dx$.
9. $f : t \mapsto \tan t$. En déduire $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan t\,dt$.
10. $f : x \mapsto \sqrt{3x-1}$. En déduire $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{3x-1}\,dx$.
11. $f : t \mapsto \dfrac{\sin t}{1+\cos^2 t}$. En déduire $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt$. On donne $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
12. $f : x \longmapsto (2x+3)^4$
13. $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{3x+2}}$
14. $f : x \longmapsto \ln(3x-1)$. On vérifiera que $x \mapsto x\ln x - x$ est une primitive de ln.
15. $f : x \longmapsto \dfrac{x^2}{\sqrt{5+x^3}}$
16. $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x\ln^2 x}$
17. $f : x \longmapsto \dfrac{\ln x}{x}$
18. $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x\ln x}$
19. $f : x \longmapsto e^{-x}\ln(1+e^{-x})$ On rappelle que $x \mapsto x\ln x - x$ est une primitive de ln.
20. $f : x \longmapsto \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$
21. $f : x \longmapsto x^2\sqrt{1+x^3}$
22. $f : x \longmapsto \dfrac{x}{\cos^2(x^2)}$
23. $f : x \longmapsto \dfrac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2}{\sqrt{x^2+1}}$ dériver le numérateur

Exercice 2 (IPP)
Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une ou de plusieurs IPP.

1. $\displaystyle\int_{\pi}^{\frac{4\pi}{3}} \frac{t}{\cos^2 t}\,dt$.
2. $\displaystyle\int_{-1}^{1} (x^2+1)e^x\,dx$.
3. $\displaystyle\int_0^2 t\ln(1+t)\,dt$ dans l'IPP, on choisira judicieusement une primitive.
4. $\displaystyle\int_1^x \ln t\,dt$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ sans utiliser de primitive de ln. Qu'en déduit-on ?
5. $\displaystyle\int_0^x \arctan(t)\,dt$ pour $x \in \mathbb{R}$ sans utiliser de primitive de arctan. Qu'en déduit-on ? On admet que la dérivée de la fonction arctan est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.
6. $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{e^t}\,dt$ pour $x \in \mathbb{R}$. Qu'en déduit-on ?

Exercice 3 (Primitivation par parties)
En effectuant une intégration par parties, déterminer les primitives de la fonction $x \longmapsto e^{-x}\ln(1+e^x)$.

Exercice 4 (Primitivations par parties multiples)
À l'aide de plusieurs intégrations par parties, déterminer une primitive de la fonction suivante :
$x \longmapsto \cos(\ln x)$ $\left(\text{on pourra remarquer que } \cos(\ln x) = x \times \frac{1}{x}\cos(\ln x)\right)$

Exercice 5 (Intégrale avec deux paramètres entiers et IPP)
On pose pour tout $(n,p)\in\mathbb{N}^2$, $I_{n,p}=\displaystyle\int_0^1 x^n(1-x)^p\,\mathrm{d}x$.

1. (a) Calculer $I_{n,0}$.
   (b) Établir une relation entre $I_{n,p}$ et $I_{n+1,p-1}$.
   (c) Calculer $I_{n,p}$.
2. En déduire une expression simple de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}\frac{1}{n+k+1}$.

Exercice 6 (*Intégrales de Wallis et IPP*)
Soit n un entier de $\mathbb{N}$. On note I_n l'intégrale suivante : $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n(t)\,\mathrm{d}t$

1. À l'aide d'une IPP, déterminer une relation entre I_{n+2} et I_n pour $n\in\mathbb{N}$.
2. Calculer I_0 et I_1.
3. En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}$, une expression de I_{2n} et de I_{2n+1} en fonction de n.

Exercice 7 (Changement de variable)
Calculer les intégrales suivantes, par le changement de variable proposé :

1. $\displaystyle\int_0^y \sin^3 t\cos^2 t\;\mathrm{d}t$ changement de variable $x=\cos t$
2. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin t}\,\mathrm{d}t$ $x=\cos t$. On cherchera a et b tels que $\dfrac{1}{x^2-1}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x+1}$.
3. $\displaystyle\int_2^3\frac{1}{t(\ln t)^n}\,\mathrm{d}t$, $n\in\mathbb{N}^*$ changement de variable $x=\ln t$
4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$ changement de variable $x=\tan t$
   Indication : après changement de variable on cherchera une primitive de la forme $x\mapsto\lambda\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)$
5. $\displaystyle\int_0^2\sqrt{x(2-x)}\,\mathrm{d}x$ changement de variable $x=1+\cos t$
6. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)\,\mathrm{d}x$ $t=\frac{\pi}{4}-x$. On simplifiera $\tan(a-b)$.
7. $\displaystyle\int_0^1\frac{\sqrt{2+t}}{1+t}\mathrm{d}t$ $t=x^2-2$. On cherchera a,b,c tels que $\frac{x^2}{x^2-1}=a+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x+1}$.

Exercice 8
Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ et préciser les valeurs de $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ pour chacune des fonctions f suivantes :

1. $f(x,y)=\ln\big(x+y^2+2\big)$
2. $f(x,y)=(3+\sqrt{x+1})\cos(2y)$
3. $f(x,y)=(x+1)^y$
4. $f(x,y)=\dfrac{\tan x}{1+y^2}$
5. $f(x,y)=(x+2)^{1+y}$. On pourra utiliser les calculs de la question 3.