Exercice 1 (EDL1 à coefficient et second membre constants)

1. Déterminer la solution de l'équation différentielle $y' + 5y = 8$ vérifiant la condition initiale $y(0) = 2$.
2. Existe-t-il une solution de l'équation différentielle $y' = -3$ vérifiant la condition $y'(0) = 7$?

Exercice 2 (EDL1 Cas général)
Méthode de la variation de la constante et principe de superposition
Résoudre les équations différentielles linéaires suivantes en précisant dans chacun des cas l'intervalle sur lequel sont obtenues les solutions. Donner l'unique solution, si elle existe, vérifiant la condition initiale $y(0) = 1$.

1. $y' + y = x$
2. $y' + y = x + 1$. On pourra utiliser la résolution précédente et le principe de superposition
3. $y' + 2y = \cos x$. On pourra effectuer deux IPP pour déterminer y_p par la MVC.
4. $y' - y = \mathrm{e}^x$
5. $y' = \ln(1 + x)$.
6. $(1 - t)y' + y = \dfrac{t-1}{t}$. On pourra chercher $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\frac{1}{t(t-1)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t-1}$
7. $(1 + t^2)y' - 2ty = (1 + t^2)^2$
8. $y' \cos t + y \sin t = 1$
9. $ty' + y = \cos t$
10. $t^2 y' + (1 - 2t)y = t^2$
11. $(1 + t)y' + y = (1 + t) \sin t$. Après la méthode de la variation de la constante, on fera une PPP.
12. $xy' - 2y = x^4$
13. $y' = (1 + \ln x)y + x^x$

Exercice 3 (EDL2 à coefficients et second membre constants)
Déterminer la solution de $y'' + y' - 6y = 1$ vérifiant les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 2$.

Exercice 4 (EDL2 à coefficients constants et second membre non constant)
Résoudre les équations différentielles suivantes. Donner pour les trois premières équations différentielles l'unique solution vérifiant les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 2$.

1. $y'' + 3y' + 2y = 10 \sin x$ on cherchera y_p sous la forme $x \mapsto a \sin x + b \cos x$.
2. $y'' - 2y' + y = 2\,\mathrm{e}^x$ on cherchera y_p sous la forme $x \mapsto ax^2\,\mathrm{e}^x$.
3. $y'' - 2y' + 5y = 13\,\mathrm{e}^{-2x}$ on cherchera y_p sous la forme $y_p : x \mapsto a\,\mathrm{e}^{-2x}$.
4. $y'' - 4y = \mathrm{e}^{2x}$ on cherchera une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto ax\,\mathrm{e}^{2x}$.
5. $y'' + 4y = \sin(2x)$ on cherchera y_p sous la forme $x \mapsto ax \cos(2x)$.
6. $y'' + y' = x$ on cherchera une solution particulière de la forme $y_p : x \mapsto ax^2 + bx$. On utilisera deux méthodes :
   - La méthode classique pour une EDL2.
   - Un changement de fonction inconnue qui nous ramène à une EDL1.
7. $y'' = \ln(x)$.

Exercice 5 (Principe de superposition pour les EDL2)

1. Déterminer une solution particulière de $y'' + 3y' + 2y = x$ sous la forme $x \mapsto ax + b$.
2. Déterminer une solution particulière de $y'' + 3y' + 2y = \mathrm{e}^x$ sous la forme $x \mapsto a\,\mathrm{e}^x$.
3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' + 3y' + 2y = x + \mathrm{e}^x$.

Exercice 6 (Équations différentielles linéaires d'ordres 1, 2 et 3)

1. **Préliminaires :**
   (a) Déterminer les réels a et b tels que $\dfrac{2x}{x+1} = a + \dfrac{b}{x+1}$ pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
   (b) En déduire une primitive de la fonction $x \longmapsto \dfrac{2x}{x+1}$ sur $\mathbb{R}_+$.
2. On considère l'équation différentielle :
$$(E')\ (x+1)z' + 2xz = (x+1)^3$$
Résoudre (E') sur $\mathbb{R}_+$.
3. On considère l'équation différentielle :
$$(E)\ (x+1)y'' - 2y' + (1-x)y = (x+1)^3\,\mathrm{e}^x$$
On cherche les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+$ sous la forme $y = ze^x$, où z est une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+$ de la variable x.
   (a) Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z' est solution de (E').
   (b) Déterminer les fonctions z, dont la dérivée est solution de (E').
   (c) En déduire les solutions y de (E) sur $\mathbb{R}_+$.
   (d) Déterminer la solution y de (E) sur $\mathbb{R}_+$ vérifiant $y(0) = y'(0) = 0$.
   (e) Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle :
$$(E'')\ (x+1)y''' - 2y'' + (1-x)y' = (x+1)^3\,\mathrm{e}^x$$

Exercice 7 (Équations différentielles linéaires d'ordres 2 et 3)

1. On considère l'équation différentielle :

$$(E')\ z'' - 4z' + 4z = \mathrm{e}^{2x}$$

Résoudre (E') sur $\mathbb{R}$ sachant que cette équation différentielle admet une solution particulière de la forme $z_p : x \longmapsto ax^2\,\mathrm{e}^{2x}$.

2. On considère l'équation différentielle :

$$(E)\ (x+1)y'' - (4x+2)y' + 4xy = \mathrm{e}^{2x}$$

On cherche les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+$. Pour cela on effectue le changement de fonction inconnue $z = (x+1)y$.

(a) Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de (E').
(b) En déduire les solutions y de (E) sur $\mathbb{R}_+$.
(c) Déterminer la solution y de (E) sur $\mathbb{R}_+$ vérifiant $y(0) = 0$ et $y'(0) = \frac{1}{2}$.
(d) Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle :

$$(E'')\ (x+1)y''' - (4x+2)y'' + 4xy' = \mathrm{e}^{2x}$$

Indication : on pourra effectuer une primitivation par parties.

Exercice 8 (Équation différentielle non linéaire)

Résoudre l'équation différentielle $(E)\ yy' + y^2 = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2x}$ sur $\mathbb{R}_+$ en effectuant le changement de fonction inconnue $z = y^2$. On pourra commencer par justifier qu'une solution y de (E) ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 9 (Modèle malthusien)

On considère une population dont le taux d'accroissement est proportionnel à la taille.

1. Déterminer une équation différentielle (E) qui décrit la taille y de cette population au cours du temps.
2. Soit y une solution de (E). Calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t)$.
3. Le modèle malthusien est-il adapté à la description d'une population sur le long terme ?

Exercice 10 (Modèle de Verhulst ou logistique)

On cherche à résoudre l'équation différentielle non linéaire $(E)\ \ y' = ry\left(1 - \dfrac{y}{K}\right)$ issue du modèle de Verhulst qui décrit l'évolution de la taille y d'une population au cours du temps.
r et K sont des constantes strictement positives appelées respectivement taux intrinsèque d'accroissement naturel et capacité limite du milieu.

1. Expliquer pourquoi le modèle de Verhulst décrit une population régulée.
2. On suppose que la fonction y est strictement positive.
   Effectuer dans (E) le changement de fonction inconnue $z = \frac{1}{y}$ et démontrer que $(E) \iff (E') :\ z' + rz = \dfrac{r}{K}$.
3. Résoudre (E').
4. En déduire toutes les solutions strictement positives de (E). Ces solutions sont appelées fonctions logistiques. Soit $y_0 \in]0, K[$, déterminer l'expression de la solution qui prend la valeur y_0 en 0.
5. Est-ce qu'une fonction logistique vous parait décrire correctement le comportement de certaines populations ?

Exercice 11 (Modèle de Gompertz)

On cherche à résoudre l'équation différentielle non linéaire $(E)\ \ y' = ay\ln\left(\dfrac{K}{y}\right)$ issue du modèle de Gompertz qui décrit l'évolution de la taille y d'une population au cours du temps.
a et K sont des constantes strictement positives. K est appelée capacité limite du milieu.

1. Expliquer pourquoi le modèle de Gompertz décrit une population régulée.
2. Effectuer dans (E) le changement de fonction inconnue $z = \ln\left(\frac{K}{y}\right)$ et démontrer que $(E) \iff (E') :\ z' + az = 0$.
3. Résoudre (E').
4. En déduire toutes les solutions de (E). Déterminer l'expression de la solution qui prend la valeur $y_0 > 0$ en 0.
5. Est-ce qu'une solution de (E) vous parait décrire correctement le comportement de certaines populations ?