

Exercice 1 (Se méfier des apparences)

1. Montrer qu'une condition nécessaire pour qu'un système à trois équations et trois

$$\text{inconnues soit échelonné est qu'il soit de la forme } (S) \begin{cases} ax + by + cz = d \\ ey + fz = g. \\ hz = i \end{cases}$$

2. Dans cette question on suppose que $a \neq 0$.

- Trouver une condition suffisante portant sur un seul coefficient pour que (S) soit échelonné.
- Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que (S) soit échelonné.
- Le système (S) est-il toujours échelonné?

Exercice 2

Résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants et donner leur rang. Valider avec Python.

$$(S_1) \begin{cases} 3x - 8y + 10z = -5 \\ x - 2y + 3z = -2, \\ 2x - 2y + 5z = -5 \end{cases}, (S_2) \begin{cases} -3x + y - 7z = 0 \\ 2x - y + 4z = 1, \\ x - y + z = 1 \end{cases}, (S_3) \begin{cases} x + 2y + 3z - 2t = 6 \\ 2x - y - 2z - 3t = 8 \\ 3x + 2y - z + 2t = 4 \\ 2x - 3y + 2z + t = -8 \end{cases}$$

Exercice 3

$$\text{Le système } (S) \begin{cases} 2x - 4y + z - t = 0 \\ -x - 5y + z + t = 0 \\ 5x + 2y - 3t = 0 \end{cases} \text{ admet-il une solution non triviale (c'est-à-dire}$$

différente de $(0, 0, 0, 0)$)? On ne cherchera pas à résoudre ce système.

Exercice 4

$$\text{Soit } (S) \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + 2y + az = 2 \\ 2x + ay + 2z = 3 \end{cases}$$

Sans chercher à résoudre ce système, déterminer pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ le système n'a pas de solution, a une infinité de solutions, a une unique solution.

Donner le rang de (S) dans tous les cas.

Exercice 5

$$\text{On considère le système } (S) \begin{cases} (1-a)x + 2y - z = 0 \\ -2x - (3+a)y + 3z = 0 \\ x + y - (2+a)z = 0 \end{cases} \text{ de paramètre } a \in \mathbb{K}.$$

- Le système (S) admet-il au moins une solution?
- Résoudre (S) en discutant sur a . On justifiera la pertinence de commencer par permuter la première équation avec une autre.

Exercice 6

$$\text{On considère le système } (S) \begin{cases} ax + y + z + t = 1 \\ x + ay + z + t = 1 \\ x + y + az + t = 1 \\ x + y + z + at = 1 \end{cases}$$

- Échelonner (S) sans faire de discussion sur a . On justifiera la pertinence de commencer par permuter la première équation avec une autre.
- Donner le rang de (S) en fonction du paramètre a .
- Pour quelles valeurs de a le système (S) admet-il :
 - aucune solution?
 - une infinité de solutions? Dans ce cas, résoudre (S) .
 - une unique solution? Dans ce cas, on ne cherchera pas à résoudre (S) .

Exercice 7 (Changements d'inconnues)

Résoudre les systèmes d'équations non linéaires en effectuant un changement d'inconnues pour se ramener à des systèmes d'équations linéaires.

$$(S_1) \begin{cases} \frac{x^2}{y^3} = 1 \\ \frac{x^4 z}{y^5} = 2 \\ \frac{x^2}{yz^3} = 3 \end{cases} (S_2) \begin{cases} 2^x - 3^y = 0 \\ 2^{1+x} - \left(\frac{1}{3}\right)^{1-y} = 5 \end{cases} (S_3) \begin{cases} \frac{1}{x-1} + \frac{2}{y-5} = -1 \\ \frac{3}{x-1} - \frac{1}{y-5} = 4 \end{cases} (S'_2) \begin{cases} 2^x + 3^y = 0 \\ 2^{1+x} - \left(\frac{1}{3}\right)^{1-y} = 5 \end{cases}$$

Exercice 8

Soit (S) un système linéaire de rang r à n équations et p inconnues.

Que peut-on dire des solutions de (S) dans les cas suivants?

- $n = 2, p = 3$ et $r = 2$.
- $n = 4, p = 3$ et $r = 3$.
- $n = 5, p = 3, r = 3$ et (S) est homogène.
- $n = 3, p = 3$ et $r = 3$.
- $n = 3, p = 3$ et $r = 2$.
- $n = 3, p = 5$ et $r = 4$.
- $n = 4, p = 3$ et $r = 4$.
- $n = 4$ et $r = 4$.