Mathématiques

Lycée THIERS
Année 23-24

Devoir surveillé n^o 4

1BCPST 2

20 janvier 2024
Durée : 3h

Qualité de la rédaction, clarté des raisonnements, présentation, orthographe et ponctuation font partie des critères de notation.
Il est vivement recommandé de lire attentivement les questions et d'*encadrer les résultats*. L'usage des calculatrices est ***interdit***.

Exercice 1. *Calculs d'intégrales*

1. Calculer puis simplifier au maximum l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 (3x-1)^4 \mathrm{d}x$.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t}\sin(2t)\,\mathrm{d}t$ à l'aide de deux intégrations par parties.
   En déduire une primitive de la fonction $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}\sin(2x)$ sur $\mathbb{R}$.
3. (a) Linéariser $\sin^5 x$.
   (b) Calculer $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^5 x\,\mathrm{d}x$.
4. Soit $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x \cos x\,\mathrm{e}^{\cos x}\mathrm{d}x$
   (a) Effectuer le changement de variable $t = \cos x$ dans I.
   (b) En effectuant une IPP dans la nouvelle intégrale, calculer la valeur de I.
   (c) Écrire une fonction python de paramètre n qui renvoie une valeur approchée de I par la méthode des rectangles.

Exercice 2. *EDL1 avec condition initiale et condition aux limites*

Soit φ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+$. On considère sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation $(E)\quad (1-\mathrm{e}^{-x})y'(x) + y(x) = \varphi(x)$.

1. Démontrer que pour tout $x > 0$, $\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-x}} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1}$.
2. Déterminer sur $\mathbb{R}_+^*$ la solution générale y_H de l'équation différentielle $(E_H)\quad (1-\mathrm{e}^{-x})y'(x) + y(x) = 0$.
3. **Un premier cas particulier : $\boldsymbol{\varphi(x) = \mathrm{e}^{-x}}$**
   (a) Déterminer une solution particulière sur $\mathbb{R}_+^*$ de $(E_1)\quad (1-\mathrm{e}^{-x})y'(x) + y(x) = \mathrm{e}^{-x}$.
   (b) Résoudre (E_1) sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (c) Déterminer la solution de (E_1) vérifiant la condition initiale $y(1) = 0$.
   (d) Justifier qu'il existe une unique solution de (E_1) sur $\mathbb{R}_+^*$ qui possède une limite finie en 0. Dans la suite de la question 3 on notera F cette solution. On admettra que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$.
   (e) Montrer que $F'(x) = \dfrac{h(x)}{(\mathrm{e}^x - 1)^2}$ avec $h(x) = \mathrm{e}^x - 1 - x\,\mathrm{e}^x$ puis dresser le tableau de variation de h en faisant figurer la valeur de h en 0.
   (f) Dresser le tableau de variations de F sur $\mathbb{R}_+^*$ avec les limites aux bornes. On donne $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} = 0$.
   (g) Écrire une fonction Python de paramètre x qui renvoie $F(x)$.
4. **Un deuxième cas particulier : $\boldsymbol{\varphi(x) = x}$**
   (a) Déterminer une solution particulière sur $\mathbb{R}_+^*$ de $(E_2)\quad (1-\mathrm{e}^{-x})y'(x) + y(x) = x$.
   (b) Résoudre (E_2) sur $\mathbb{R}_+^*$.
5. **Un troisième cas particulier : $\boldsymbol{\varphi(x) = \mathrm{e}^{-x} + x}$**
   Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle $(E_3)\quad (1-\mathrm{e}^{-x})y'(x) + y(x) = \mathrm{e}^{-x} + x$.

Exercice 3. *Résolution d'une EDL2 à coefficients non constants*

On s'intéresse à l'équation différentielle (E) $(2x+1)y''+(2x+5)y'+(2x+3)y = \mathrm{e}^x$

1. Expliquer pourquoi la méthode du cours pour les EDL2 ne peut pas s'appliquer pour (E).
2. Si y est une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^+$, on pose $w(x)=(2x+1)y(x)$.
   (a) Exprimer w' et w'' en fonction de y, y' et y''.
   (b) Montrer que w est solution de l'équation différentielle (E') $w''+w'+w = \mathrm{e}^x$ si et seulement si y est solution de (E).
   (c) Déterminer un réel r tel que la fonction $w_p : x \mapsto r\,\mathrm{e}^x$ soit une solution particulière de (E').
   (d) Résoudre (E') sur $\mathbb{R}_+$.
   (e) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 4. *SAG*

1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -\dfrac{1}{2}u_n + 3$.
   (a) Exprimer u_n en fonction de n.
   (b) Déterminer la limite ℓ de (u_n).
   (c) Écrire une fonction python `seuil(ep)` qui renvoie le plus petit entier naturel n tel que $|u_n - \ell| \leqslant ep$. Dans cette question on s'interdira d'utiliser le résultat de la question a. En revanche on pourra utiliser la valeur de ℓ trouvée à la question précédente.

Exercice 5. *Calcul de dérivées partielles*

Soit $f(x,y) = \ln(\mathrm{e}^x + \cos(y))$. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ et préciser les valeurs de $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

Exercice 6. *Variation autour d'une SRL2*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \text{ et } u_1 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n - 3n + 1 \end{cases}$

1. Écrire une fonction python *suite_u(n)* qui renvoie la valeur de u_n.
2. Déterminer une suite arithmétique (w_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N},\ w_{n+2} = 2w_{n+1} - 2w_n - 3n + 1$.
3. Soit $v_n = u_n - w_n$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} = 2v_{n+1} - 2v_n$ et $v_0 = v_1 = 1$.
4. Calculer v_n en fonction de l'entier naturel n.
5. Calculer u_n en fonction de l'entier naturel n.