# Mathématiques

Lycée THIERS
Année 23-24

## Devoir surveillé n° 4

**1BCPST 2**

20 janvier 2024
Durée : 3h

Qualité de la rédaction, clarté des raisonnements, présentation, orthographe et ponctuation font partie des critères de notation. Il est vivement recommandé de lire attentivement les questions et d'*encadrer les résultats*. L'usage des calculatrices est ***interdit***.

## Exercice 1. *Calculs d'intégrales*

1. On pose $f(x) = (3x-1)^4$.
   $f = u^4$ avec $u(x) = 3x-1$ et $u'(x) = 3$ donc $f = \frac{1}{3}u'u^4$ qui se primitive en $F = \frac{1}{3}\frac{u^{4+1}}{4+1} = \frac{u^5}{15}$.
   $$\int_0^1 (3x-1)^4 \mathrm{d}x = \left[\frac{(3x-1)^5}{15}\right]_0^1 = \frac{2^5}{15} - \frac{(-1)^5}{15} = \frac{32-(-1)}{15} = \frac{33}{15} = \frac{\cancel{3}\times 11}{\cancel{3}\times 5}$$
   $$\boxed{\int_0^1 (3x-1)^4 \mathrm{d}x = \frac{11}{5}}$$

2. On effectue une IPP. On pose $v(t) = \sin(2t)$ et $u'(x) = \mathrm{e}^{-t}$. On choisit $u(t) = -\mathrm{e}^{-t}$. On a également $v'(t) = 2\cos(2t)$. Les fonctions $u$ et $v$ sont de lasse $\mathrm{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   $$I = \int_0^x \mathrm{e}^{-t}\sin(2t)\,\mathrm{d}t = \Big[-\mathrm{e}^{-t}\sin(2t)\Big]_0^x - \int_0^x -\mathrm{e}^{-t}2\cos(2t)\,\mathrm{d}t = -\mathrm{e}^{-x}\sin(2x) + 2\int_0^x \mathrm{e}^{-t}\cos(2t)\,\mathrm{d}t$$
   On effectue une deuxième IPP en dérivant à nouveau la fonction trigonométrique et en primitivant à nouveau la fonction exponentielle. Le choix inverse amène à défaire ce que l'on obtenu à la première IPP. On pose $v(t) = \cos(2t)$ et $u'(t) = \mathrm{e}^{-t}$. On choisit $u(t) = -\mathrm{e}^{-t}$. On a également $v'(t) = -2\sin(2t)$. Les fonctions $u$ et $v$ sont de lasse $\mathrm{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   $$\begin{aligned}\int_0^x \mathrm{e}^{-t}\cos(2t)\,\mathrm{d}t &= \Big[-\mathrm{e}^{-t}\cos(2t)\Big]_0^x - \int_0^x \mathrm{e}^{-t}2\sin(2t)\,\mathrm{d}t = -\mathrm{e}^{-x}\cos(2x) + 1 - 2\int_0^x \mathrm{e}^{-t}\sin(2t)\,\mathrm{d}t \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-x}\cos(2x) - 2I\end{aligned}$$
   Par report dans la première IPP,
   $$I = -\mathrm{e}^{-x}\sin(2x) + 2\Big(1 - \mathrm{e}^{-x}\cos(2x) - 2I\Big) = -\mathrm{e}^{-x}\sin(2x) + 2 - 2\,\mathrm{e}^{-x}\cos(2x) - 4I$$
   D'où $5I = -\mathrm{e}^{-x}\sin(2x) - 2\,\mathrm{e}^{-x}\cos(2x) + 2$
   $$\boxed{\int_0^x \mathrm{e}^{-t}\sin(2t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{5}\,\mathrm{e}^{-x}\sin(2x) - \frac{2}{5}\,\mathrm{e}^{-x}\cos(2x) + \frac{2}{5}}$$ On en déduit que
   $\boxed{\text{La fonction } x \mapsto -\frac{1}{5}\,\mathrm{e}^{-x}\sin(2x) - \frac{2}{5}\,\mathrm{e}^{-x}\cos(2x) \text{ est une primitive de } x \mapsto \mathrm{e}^{-x}\sin(2x) \text{ sur } \mathbb{R}.}$

3. (a) D'après les formule d'Euler, $\sin^5 x = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\right)^5 = \frac{\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)^5}{2^5\mathrm{i}^5}$

   $2^5 = 32$ et $\mathrm{i}^5 = \mathrm{i}^{4+1} = \mathrm{i}^4\mathrm{i} = \left(\mathrm{i}^2\right)^2\mathrm{i} = (-1)^2\mathrm{i} = 1\mathrm{i} = \mathrm{i}$ donc $\sin^5 x = \frac{\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)^5}{32\mathrm{i}}$

   Construisons le triangle de Pascal jusqu'à la ligne 5 :

   | | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
   |---|---|---|---|---|---|---|
   | 0 | 1 | | | | | |
   | 1 | 1 | 1 | | | | |
   | 2 | 1 | 2 | 1 | | | |
   | 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | | |
   | 4 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | |
   | 5 | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 |

   donc par la formule du binôme de Newton et la formule de Moivre :
   $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)^5 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}5x} - 5\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}4x}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} + 10\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}3x}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2x} - 10\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}2x}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}3x} + 5\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}4x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}5x}$

$$= e^{i5x} - 5\,e^{i3x} + 10\,e^{ix} - 10\,e^{-ix} + 5\,e^{-i3x} - e^{-i5x}$$
$$= (e^{i5x} - e^{-i5x}) - 5(e^{i3x} - e^{-i3x}) + 10(e^{ix} - e^{-ix})$$

donc

$$\frac{\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^5}{32i} = \frac{1}{16}\frac{\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^5}{2i} = \frac{1}{16}\left(\frac{e^{i5x}-e^{-i5x}}{2i} - 5\frac{e^{i3x}-e^{-i3x}}{2i} + 10\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)$$

D'après les formules d'Euler, $\boxed{\sin^5 x = \frac{1}{16}\Big(\sin(5x) - 5\sin(3x) + 10\sin(x)\Big)}$

(b) D'après la formule précédente et par linéarité de l'intégrale,

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^5 x\,dx = \frac{1}{16}\left(\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin(5x)\,dx - 5\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin(3x)\,dx + 10\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)\,dx\right)$$
$$= \frac{1}{16}\left(\left[-\frac{\cos(5x)}{5}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} - 5\left[-\frac{\cos(3x)}{3}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} + 10\Big[-\cos(x)\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\right)$$
$$= \frac{1}{16}\left(\frac{\sqrt{2}}{10} - \frac{\sqrt{3}}{10} - 5\left(\frac{\sqrt{2}}{6} + 0\right) + 10\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) \text{ réponse acceptable}$$
$$= \frac{1}{16}\left(\frac{\sqrt{2}}{10} - \frac{5\sqrt{2}}{6} - \frac{10\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{10} + \frac{10\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{16}\left(\frac{3\sqrt{2}}{30} - \frac{25\sqrt{2}}{30} - \frac{150\sqrt{2}}{30} - \frac{3\sqrt{3}}{30} + \frac{150\sqrt{3}}{30}\right) = \frac{1}{16}\,\frac{-172\sqrt{2}+147\sqrt{3}}{30}$$

$$\boxed{\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^5 x\,dx = \frac{147\sqrt{3}-172\sqrt{2}}{480}}$$

4. (a) **Nouvelles bornes**

Si $x = 0$ alors $t = \cos 0 = \boxed{1}$

Si $x = \frac{\pi}{3}$ alors $t = \cos\frac{\pi}{3} = \boxed{\frac{1}{2}}$

**Relation entre d$x$ et d$t$**

$\frac{dt}{dx} = \frac{d\cos x}{dx} = -\sin x$ donc $dt = -\sin x\,dx$

**Changement de variable**

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x\cos x\,e^{\cos x}dx = -\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x\,e^{\cos x}(-\sin x)dx = -\int_1^{\frac{1}{2}} t\,e^t dt$$

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x\cos x\,e^{\cos x}dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 t\,e^t dt}$$

(b) Effectuons une IPP dans l'intégrale $\int_{\frac{1}{2}}^1 t\,e^t dt$ avec $v(t) = t$ et $u'(t) = e^t$ donc $v'(t) = 1$ et $u(t) = e^t$.

Les fonctions $u$ et $v$ sont de classe $C^1$ sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 t\,e^t dt = \left[t\,e^t\right]_{\frac{1}{2}}^1 - \int_{\frac{1}{2}}^1 e^t dt = e - \frac{1}{2}\sqrt{e} - \left[e^t\right]_{\frac{1}{2}}^1 = e - \frac{1}{2}\sqrt{e} - \left(e - \sqrt{e}\right) = \cancel{e} - \frac{1}{2}\sqrt{e} - \cancel{e} + \sqrt{e}$$

D'après la question précédente, $\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x\cos x\,e^{\cos x}dx = \frac{1}{2}\sqrt{e}}$

(c) Par la méthode des rectangles on approche $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x\cos x\,e^{\cos x}dx$ par :

$$\frac{\pi}{3n}\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{3n}\right)\cos\left(\frac{k\pi}{3n}\right)\,\mathrm{e}^{\cos\left(\frac{k\pi}{3n}\right)}$$

```
import math as m
def rectangles(n):
    s=0
    for k in range(n):
        s += m.sin(k*m.pi/3/n)* m.cos(k*m.pi/3/n).m.exp( m.cos(k*m.pi/3/n))
    return s*m.pi/3/n
```

## Exercice 2. *EDL1 avec condition initiale et condition aux limites*

1. Soit $x > 0$. On a $\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-x}} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x(1-\mathrm{e}^{-x})} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{-x}}$

   Sachant que $\mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{-x} = 1$ on a bien $\boxed{\forall x > 0,\ \dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-x}} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1}}$

2. Sur $\mathbb{R}_+^*$, on a :

   $(E_H) \iff y'(x) + \dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-x}}y(x) = 0 \iff y'(x) + \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1}y(x) = 0$ d'après la question précédente

   $(E_H)$ est équivalente à $y' + a(x)y = 0$ où $a = \frac{u'}{u}$ avec $u(x) = \mathrm{e}^x - 1$.

   La fonction $a$ a pour primitive $A = \ln|u| = \ln(u)$ car la fonction $u : x \mapsto \mathrm{e}^x - 1$ est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

   $\mathrm{e}^{-A(x)} = \mathrm{e}^{-\ln(\mathrm{e}^x-1)} = \mathrm{e}^{\ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right)} = \frac{1}{\mathrm{e}^x-1}$ on a donc

   $$\boxed{\mathscr{S}_{E_H} = \left\{\begin{array}{l}\mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}\\ x \longmapsto \dfrac{\lambda}{\mathrm{e}^x - 1}\end{array},\lambda\in\mathbb{R}\right\}}$$

3. (a) $(E_{1H}) \iff (E_H)$ et $(E_1) \iff y'(x) + \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1}y(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}$

   or $\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}} = \mathrm{e}^{-x}\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-x}} = \cancel{\mathrm{e}^{-x}}\dfrac{\cancel{\mathrm{e}^x}}{\mathrm{e}^x - 1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x - 1}$ d'après la question 1

   On a alors $(E_1) \iff y'(x) + \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1}y(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x - 1}$

   Déterminons par la méthode de la variation de la constante une solution particulière de $(E_1)$ sous la forme $y_p(x) = \dfrac{z(x)}{\mathrm{e}^x - 1} = z(x)\dfrac{1}{\mathrm{e}^x - 1}$. On a alors $y_p'(x) = z'(x)\dfrac{1}{\mathrm{e}^x - 1} + z(x)\left(-\frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x-1)^2}\right)$.

   par report,

   $y_p' + \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1}y_p = z'(x)\dfrac{1}{\mathrm{e}^x - 1} \cancel{- z(x)\left(\frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x-1)^2}\right)} + \cancel{\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1}\left(\frac{z(x)}{\mathrm{e}^x-1}\right)} = z'(x)\dfrac{1}{\mathrm{e}^x - 1}$.

   On a alors

   $y_p$ est solution de $(E_1) \iff z'(x)\cancel{\dfrac{1}{\mathrm{e}^x - 1}} = \cancel{\dfrac{1}{\mathrm{e}^x - 1}} \iff z'(x) = 1$.

   On choisit $z(x) = x$ donc

   $\boxed{y_p : x \mapsto \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1} \text{ est une solution particulière de } (E_1).}$

   (b) Les solutions de $(E_1)$ sont les fonctions de la forme $y_p + y_H$ où $y_H$ est la solution générale de $(E_H)$.

   D'après les questions précédentes, $\boxed{\mathscr{S}_{E_1} = \left\{\begin{array}{l}\mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}\\ x \longmapsto \dfrac{x+\lambda}{\mathrm{e}^x - 1}\end{array},\lambda\in\mathbb{R}\right\}}$

(c) Si $y(x) = \dfrac{x+\lambda}{\mathrm{e}^x - 1}$ alors $y(1) = \dfrac{1+\lambda}{\mathrm{e}-1}$ donc $y(1) = 0 \iff 1+\lambda = 0 \iff \lambda = -1$

$$\boxed{\text{La solution de } (E_1) \text{ vérifiant la condition initiale } y(1)=0 \text{ est la fonction : } \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x-1}{\mathrm{e}^x-1} \end{array}\right. .}$$

(d) Soit $y$ une solution de $E_1$. On a vu à la question précédente que $y$ s'écrivait :
$y(x) = \dfrac{x+\lambda}{\mathrm{e}^x-1} = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x-1} + \lambda\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}$.
D'après l'indication on a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x-1} = 1$.
$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1} = +\infty$ donc si $\lambda \neq 0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x-1} + \lambda\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}$ est infinie.
La seule solution de $(E_1)$ admettant une limite finie en 0 est celle relative à $\lambda = 0$.

$$\boxed{\text{La fonction } F : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{\mathrm{e}^x-1} \end{array}\right. \text{ est la seule solution de } (E_1) \text{ admettant une limite finie en 0.}}$$

(e) $F'(x) = \dfrac{(\mathrm{e}^x-1) - x\,\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x-1)^2}$ donc $\boxed{F(x) = \dfrac{h(x)}{(\mathrm{e}^x-1)^2} \text{ avec } h(x) = \mathrm{e}^x - 1 - x\,\mathrm{e}^x.}$

Étudions la fonction $h$.
$h'(x) = \mathrm{e}^x - (\mathrm{e}^x + x\,\mathrm{e}^x) = -x\,\mathrm{e}^x$.
$h'(x) < 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ car $\mathrm{e}^x > 0$ et $x > 0$. $h(0) = 0$. On obtient le tableau de variation :

| $x$ | $0$ | |
|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $-$ |
| $h(x)$ | $0$ | $\searrow$ |

(f) D'après la question précédente, $\forall x \in \mathbb{R}_+, h(x) < 0$ et $F'(x) = \frac{h(x)}{(\mathrm{e}^x-1)^2}$ donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ F'(x) < 0$ ce qui entraîne que la fonction $F$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
D'après la question 3d, $\lim\limits_{x\to 0} F(x) = 1$.
D'après l'indication, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $F'(x)$ | $\|\|$ | $-$ | |
| $F(x)$ | $\|\|$ $1$ | $\searrow$ | $0$ |

(g)
```
from math import *
def F(x):
```

```
return x / (exp(x)-1)
```

4. (a) $(E_{2H}) \iff (E_H)$ et $(E_2) \iff y'(x) + \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1} y(x) = \dfrac{x}{1 - \mathrm{e}^{-x}}$

or $\dfrac{x}{1-\mathrm{e}^{-x}} = x\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-x}} = x\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1} = \dfrac{x\,\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1}$ d'après la question 1

On a alors $(E_2) \iff y'(x) + \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1} y(x) = \dfrac{x\,\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1}$

Déterminons par la méthode de la variation de la constante une solution particulière de $(E_2)$ sous la forme $y_p(x) = \dfrac{z(x)}{\mathrm{e}^x - 1} = z(x)\dfrac{1}{\mathrm{e}^x - 1}$. On a alors $y_p'(x) = z'(x)\dfrac{1}{\mathrm{e}^x - 1} + z(x)\left(-\frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x - 1)^2}\right)$.

par report,

$y_p' + \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1} y_p = z'(x)\dfrac{1}{\mathrm{e}^x - 1} \cancel{- z(x)\left(\frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x - 1)^2}\right)} + \cancel{\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1}\left(\frac{z(x)}{\mathrm{e}^x - 1}\right)} = z'(x)\dfrac{1}{\mathrm{e}^x - 1}$.

On a alors

$y_p$ est solution de $(E_2) \iff z'(x)\dfrac{1}{\cancel{\mathrm{e}^x - 1}} = \dfrac{x\,\mathrm{e}^x}{\cancel{\mathrm{e}^x - 1}} \iff z'(x) = x\,\mathrm{e}^x$.

Pour déterminer une primitive de $x \mapsto x\,\mathrm{e}^x$ on va effectuer une IPP dans $\displaystyle\int_0^x t\,\mathrm{e}^t \mathrm{d}t$ avec $v(t) = t$ et $u'(t) = \mathrm{e}^t$ donc $v'(t) = 1$ et $u(t) = \mathrm{e}^t$. Les fonctions $u$ et $v$ sont de classe $\mathrm{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

$\displaystyle\int_0^x t\,\mathrm{e}^t \mathrm{d}t = \left[t\,\mathrm{e}^t\right]_0^x - \int_0^x \mathrm{e}^t \mathrm{d}t = x\,\mathrm{e}^x - \left[\mathrm{e}^t\right]_0^x = x\,\mathrm{e}^x - (\mathrm{e}^x - 1) = x\,\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + 1$

On choisit $z(x) = x\,\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x = (x-1)\,\mathrm{e}^x$ donc

$\boxed{y_p : x \mapsto \dfrac{(x-1)\,\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1} \text{ est une solution particulière de } (E_2).}$

(b) Les solutions de $(E_2)$ sont les fonctions de la forme $y_p + y_H$ où $y_H$ est la solution générale de $(E_H)$.

D'après les questions précédentes, $\boxed{\mathscr{S}_{E_2} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{(x-1)\,\mathrm{e}^x + \lambda}{\mathrm{e}^x - 1} \end{array}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}}$

5. D'après les questions précédentes,

$y_{p1} : x \mapsto \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$ est une solution particulière de l'EDL1 $(E_1)$ $\quad (1 - \mathrm{e}^{-x})y'(x) + y(x) = \mathrm{e}^{-x}$ et

$y_{p2} : x \mapsto \dfrac{(x-1)\,\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1}$ est une solution particulière de l'EDL1 $(E_2)$ $\quad (1 - \mathrm{e}^{-x})y'(x) + y(x) = x$

D'après le principe de superposition,

$y_{p1} + y_{p2} : x \mapsto \dfrac{x + (x-1)\,\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1}$ est une solution particulière de l'EDL1 $(E_3)$ $\quad (1 - \mathrm{e}^{-x})y'(x) + y(x) = \mathrm{e}^{-x} + x$

Les solutions de $(E_3)$ sont les fonctions de la forme $y_{p1} + y_{p2} + y_H$ où $y_H$ est la solution générale de $(E_H)$.

$$\boxed{\mathscr{S}_{E_3} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{x + (x-1)\,\mathrm{e}^x + \lambda}{\mathrm{e}^x - 1} \end{array}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}}$$

## Exercice 3. *Résolution d'une EDL2 à coefficients non constants*

1.

$\boxed{\text{Les coefficients de cette EDL2 ne sont pas constants donc on ne peut pas appliquer les méthodes du cours.}}$

2. (a) $\boxed{w' = 2y + (2x+1)y'}$ donc $w'' = 2y' + 2y' + (2x+1)y''$ et $\boxed{w'' = 4y' + (2x+1)y''}$

(b) D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} w''+w'+w &= (4y'+(2x+1)y'')+\big(2y+(2x+1)y'\big)+(2x+1)y \\ &= (2x+1)y''+\big(4+(2x+1)\big)y'+\big(2+(2x+1)\big)y \\ &= (2x+1)y''+(2x+5)y'+(2x+3)y \quad \text{on reconnait le membre de gauche de } (E) \end{aligned}$$

Par ailleurs $(E')$ et $(E)$ ont le même second membre donc

$\boxed{w \text{ est solution de } (E') \text{ si et seulement si } y \text{ est solution de } (E).}$

(c) $w_p : x \mapsto r\,\mathrm{e}^x$ est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}^+$, $w_p'(x) = r\,\mathrm{e}^x$ puis $w_p''(x) = -r\,\mathrm{e}^x$. On a donc $w_p''(x) + w_p'(x) + w_p(x) = 3r\,\mathrm{e}^x$. Ainsi $\boxed{r = \dfrac{1}{3}}$ convient donc

$\boxed{w_p : x \mapsto \frac{1}{3}\mathrm{e}^x \text{ est une solution particulière de } (E') \text{ sur } \mathbb{R}_+.}$

(d) On considère l'EDL2 homogène $(E_H)$ $w''+w'+w=0$ dont l'équation caractéristique est $(E_c)$ $x^2+x+1=0$.

Le discriminant de $x^2+x+1$ est $\Delta = 1^2-4 = -3 < 0$ donc les solutions de $(E_c)$ sont $\frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

La solution générale de $(E_H)$ est la fonction $w_H : x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\left(\lambda\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+\mu\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$

La solution générale de $(E')$ est donnée par la formule $w = w_p + w_H$.

$$\boxed{\mathscr{S}_{E'} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{3}\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\left(\lambda\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+\mu\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) \end{array}, (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2 \right\}}$$

(e) D'après la question 2b, la solution générale de $(E)$ sur $\mathbb{R}_+$ est $\frac{w}{2x+1}$ où $w$ est la solution générale de $(E')$.

$$\boxed{\mathscr{S}_{E} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{\frac{1}{3}\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\left(\lambda\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+\mu\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)}{2x+1} \end{array}, (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2 \right\}}$$

## Exercice 4. *SAG*

1. (a) Déterminons le point fixe de $x \mapsto -\frac{1}{2}x+3$.

$-\frac{1}{2}x+3 = x \iff 3 = \frac{1}{2}x+x \iff 3 = \left(\frac{1}{2}+1\right)x \iff 3 = \frac{3}{2}x \iff \cancel{3}\times\frac{2}{\cancel{3}} = x \iff 2 = x$

Le point fixe de $x \mapsto -\frac{1}{2}x+3$ est le nombre 2 donc $2 = -\frac{1}{2}\times 2+3$.

Retranchons cette égalité à la relation de récurrence $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n+3$ :

$u_{n+1}-2 = -\dfrac{1}{2}u_n+\cancel{3}-\left(-\frac{1}{2}\times 2+\cancel{3}\right) = -\frac{1}{2}(u_n-2)$

Ceci montre que la suite $(u_n-2)$ est géométrique de raison $-\frac{1}{2}$.

$u_n-2 = (u_0-2)\left(-\frac{1}{2}\right)^n = -\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ d'où $\boxed{u_n = 2-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n}$

(b) $-\frac{1}{2} \in ]-1,1[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$ et par somme $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2}$

(c)
```
def seuil(ep):
    n,u = 0,1
    while abs(u-2) > ep:
        u, n = -u/2+3, n+1
    return n
```

## Exercice 5. *Calcul de dérivées partielles*

En fixant la valeur de $y$ on peut écrire $f(x,y) = \ln(u(x))$ avec $u(x) = \mathrm{e}^x + \cos(y)$

$\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)} = \dfrac{u'(x)}{u(x)} = \boxed{\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + \cos(y)}}$. En particulier $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{1}{2}}$.

En fixant la valeur de $x$ on peut écrire $f(x,y) = \ln(v(y))$ avec $v(y) = \mathrm{e}^x + \cos(y)$

$\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)} = \dfrac{v'(y)}{v(y)} = \boxed{\dfrac{-\sin(y)}{\mathrm{e}^x + \cos(y)}}$. En particulier $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0}$

## Exercice 6. *Variation autour d'une SRL2*

1. 
```
def suit_u(n):
    u, v = 2, -1
    for k in range(n):
        u, v = v, 2*v - 2*u - 3*k +1
    return u
```

2. Une suite arithmétique s'écrit $w_n = an + b$.

   Cette suite vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+2} = 2w_{n+1} - 2w_n - 3n + 1$ si et seulement si $\forall n, a(n+2) + b = 2(a(n+1) + b) - 2(an+b) - 3n + 1 \iff \forall n, an + b = -3n + 1 \iff a = -3$ et $b = 1$.

   $\boxed{\text{La suite définie par } w_n = -3n+1 \text{ est arithmétique et vérifie } w_{n+2} = 2w_{n+1} - 2w_n - 3n + 1.}$

3. $v_{n+2} - 2v_{n+1} + 2v_n = (u_{n+2} - 2u_{n+1} + 2u_n) - (w_{n+2} - 2w_{n+1} + 2w_n) = (-3n+1) - (-3n+1) = 0$ donc la suite $(v_n)$ vérifie la relation :

   $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+2} = 2v_{n+1} - 2v_n}$.

4. $(v_n)$ est une SRL2 d'équation caractéristique $x^2 - 2x + 2 = 0$ de discriminant $-4$ et de racines $1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ et $1 - \mathrm{i} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

   Il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $v_n = (\sqrt{2})^n(\lambda\cos(n\frac{\pi}{4}) + \mu\sin(n\frac{\pi}{4}))$.

   En particulier $u_0 - 1 = v_0 = \lambda\cos(0) + \mu\sin(0)$ et $u_1 - (-2) = v_1 = \sqrt{2}(\lambda\cos(\frac{\pi}{4}) + \mu\sin(\frac{\pi}{4}))$ donc $1 = \lambda$ et $1 = \sqrt{2}(\lambda\frac{\sqrt{2}}{2} + \mu\frac{\sqrt{2}}{2})$ d'où $\lambda = 1$ et $\mu = 0$.

   $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, v_n = (\sqrt{2})^n \cos\left(n\dfrac{\pi}{4}\right)}$

5. $u_n = v_n + w_n = v_n - 3n + 1$ donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\sqrt{2})^n \cos\left(n\dfrac{\pi}{4}\right) - 3n + 1}$