Questions de cours

1. Le colleur choisira l'une des trois questions suivantes :
   (a) Soit $A \in \mathcal{M}_3$ et $X_n \in \mathcal{M}_{3,1}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.
   (b) Soit A, D, P trois matrice de $\mathcal{M}_3$ telles que P soit inversible et $A = PDP^{-1}$. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
   (c) Soit A, D, P trois matrice de $\mathcal{M}_3$ telles que P soit inversible et $A = PDP^{-1}$. Démontrer que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de P, P^{-1}, D^{-1}.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_3$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ Démontrer que si le système d'écriture matricielle $AX = Y$ admet une unique solution alors A est inversible. On admettra que s'il existe B telle que $AB = I_3$ alors A est inversible.
3. Démontrer que si $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ alors $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible, on donnera alors, en le justifiant, l'expression de l'inverse en fonction de a, b, c, d.
   On ne cherchera pas à démontrer la réciproque.
4. Donner les règles de calcul numériques interdites pour les matrices. Énoncer les propriétés de la transposition (2.9) et de l'inverse (3.10 et 3.11).

Programme

- Python
  — Approximation de $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ par $\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$ ou $\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$
  — Fonctions qui renvoie le maximum d'une liste, le premier rang du maximum, les rangs du maximum.
  — Manipulation de tableaux *numpy*.
- Systèmes d'équations linéaires : semaine dernière
- Matrices
  — Taille d'une matrice, double indexation des coefficients d'une matrice et notation $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
  — Matrices lignes, colonnes, nulles (notation $0_{\mathcal{M}_{n,p}}$).
  — Opérations sur les matrices : somme, produit par un scalaire, produit matriciel, transposition (notation A^T). Propriétés : associativité démontrée.
  — Si A, B, C sont des matrices telles que B et C aient la même taille et $AB = AC$ ou $BA = CA$ alors on ne peut pas simplifier par la matrice A même si celle-ci est non nulle.
  — On ne peut pas diviser par une matrice.
  — Matrices carrées, notation $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Matrices identités, notation I_n.
  — Si $(A, B) \in \mathcal{M}_n^2(\mathbb{K})$ alors en général $AB \neq BA$.
  — Puissances d'une matrice carrée. Propriétés.
  — Formule du binôme de Newton pour des matrices carrées qui commutent.
  — Matrices inversibles (notation A^{-1}) : définition, unicité et propriétés. $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ inversible $\iff$ $\mathrm{rg}\,(A) = n$.
  — Écriture matricielle d'un système d'équations linéaires.
  — Opérations élémentaires sur une matrice. Matrice échelonnée. Pivot d'une matrice échelonnée. Algorithme du pivot de Gauss pour une matrice. Rang d'une matrice. Propriétés du rang.
  — Inversion d'une matrice carrée à l'aide d'un système linéaire à paramètres.
  — Déterminant d'une matrice $(2,2)$. Inversibilité d'une matrice 2×2 et expression de l'inverse. Application à la résolution d'un système linéaire $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$ lorsque $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ (Formules de Cramer hors programme).
  — Utilisation de l'inverse d'une matrice pour résoudre un système linéaire.
  — Étude matricielle de suites vérifiant des relations de récurrence "croisées".
  — Résolution matricielle d'un système différentiel d'ordre 1.
  — Matrices diagonales, matrices triangulaires, matrices symétriques.