Mathématiques

Lycée THIERS
Année 23-24

Devoir surveillé n° 5

1BCPST 2

14 février 2024
Durée : 2h

Qualité de la rédaction, clarté des raisonnements, présentation, orthographe et ponctuation font partie des critères de notation.
Il est vivement recommandé de lire attentivement les questions et d'*encadrer les résultats*. L'usage des calculatrices est ***interdit***.

Exercice 1. *Système d'équations non linéaires à paramètres*

On considère le système $(S)\begin{cases} yz = 1 \\ xz = \mathrm{e} \\ xyz^a = \mathrm{e}^b \end{cases}$ où a, b sont des paramètres réels et e le nombre d'Euler ($\ln(\mathrm{e}) = 1$).

On cherche à résoudre (S) dans $(\mathbb{R}_+^*)^3$ c'est-à-dire trouver tous les triplets de nombres **strictement positifs** (x, y, z) satisfaisant les trois équations de (S).

1. Montrer que (S) est équivalent à un système d'équations linéaires (S') d'inconnues X, Y, Z avec $X = \ln(x)\,, Y = \ln(y)$ et $Z = \ln(z)$.
2. Quelle condition doivent satisfaire a et b pour que (S') admette au moins une solution ?
3. (a) Résoudre (S') puis (S) dans le cas $a = 3$ et $b = 2$.
   (b) Résoudre (S') puis (S) dans le cas $a = 2$ et $b = 1$.

Exercice 2. *Autour du minimum*

1. Écrire une fonction python *mini* d'argument *lst* qui renvoie le minimum de la liste *lst*.
2. Écrire une fonction python *rgMini* de paramètre *lst* qui renvoie le premier rang où le minimum de la liste *lst* est atteint.

Exercice 3. *Puissances de matrices et équations matricielles*

Pour simplifier, on notera I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. On note $M = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -6 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.
   (a) Expliciter les coefficients de $A = \dfrac{1}{3}(M - I)$ puis ceux de A^2. En déduire une expression de A^2 en fonction de A.
   (b) Exprimer M en fonction de I et A.
   (c) On rappelle que par convention $B^0 = I$ pour tout $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   Démontrer qu'il existe une suite arithmético-géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = I + u_n A$$
   (d) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer u_n en fonction de n et en déduire une expression de M^n en fonction de n, I et A. Expliciter les coefficients de la première colonne de M^n.
   (e) On considère trois suites $(x_n), (y_n), (z_n)$ vérifiant $\begin{cases} x_{n+1} = -5x_n - 6z_n \\ y_{n+1} = 3x_n + y_n + 3z_n \\ z_{n+1} = 3x_n + 4z_n \end{cases}$ et $\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases}$
      i. On note $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$. Donner l'écriture matricielle des relations de récurrence précédentes.
      ii. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = M^n X_0$.
      iii. En déduire les expressions de x_n, y_n, z_n en fonction de n.
2. Soit $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer J^2 et en déduire que J n'est pas inversible.
   (b) Conjecturer l'expression de J^p pour $p \geqslant 1$ et démontrer cette conjecture.
   (c) On considère l'ensemble $\mathscr{E} = \{aI + bJ, (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.
   Pour tout $(u, v, u', v') \in \mathbb{R}^4$ on pourra, dans la suite de l'exercice, admettre l'équivalence
   $$uI + vJ = u'I + v'J \iff u = u' \text{ et } v = v'$$
      i. Soit $(a, b, a', b') \in \mathbb{R}^4$. Démontrer que $(aI + bJ)(a'I + b'J) \in \mathscr{E}$.
      ii. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \neq 0$ et $a + b \neq 0$.
      Démontrer que l'équation $(aI + bJ)(a'I + b'J) = I$ d'inconnues a', b' admet une unique solution que l'on exprimera en fonction de a et b.
      En déduire que $aI + bJ$ est inversible et exprimer $(aI + bJ)^{-1}$ en fonction de a, b, I et J.
      iii. Déterminer toutes les matrices X de $\mathscr{E}$ vérifiant l'équation (E_1) $X^2 = I$
      Indication : on pourra poser $X = aI + bJ$.
      iv. Déterminer toutes les matrices X de $\mathscr{E}$ vérifiant l'équation (E_2) $X^2 = X$
      v. Est-ce qu'une équation matricielle de degré 2 peut admettre plus de 2 solutions ?
   (d) On se propose de calculer M^n à l'aide de I et J sans utiliser les résultats de la question 1.
      i. Montrer que $M \in \mathscr{E}$.
      ii. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N} \quad M^n = (-2)^n I + (1 - (-2)^n)J$.