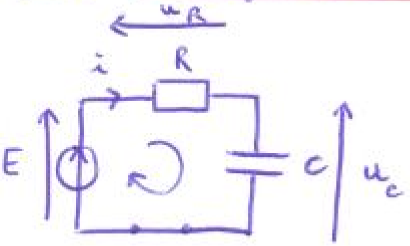
Equations différentielles du 1er ordre en sciences physiques

A. Charge et décharge d'un condensateur :

à $t=0$, $u_C=0$ (C non chargé)



$$-u_C - u_R + E = 0 \Rightarrow u_C + u_R = E$$

- Or : $u_R = R.i$, $q = C.u_C$ et $i = \frac{dq}{dt}$

$$\Rightarrow u_R = R.\frac{dq}{dt} = RC.\frac{du_C}{dt}$$

$$\Rightarrow R.C.\frac{du_C}{dt} + u_C = E$$

On pose : $\tau = RC$ (temps caractéristique)

$$\Rightarrow \boxed{\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{\tau} = \frac{E}{\tau}}$$

$\rightsquigarrow$ solution : $u_C(t) = A.e^{-t/\tau} + E \overset{u_C(0)=0}{=} E.\left(1-e^{-t/\tau}\right)$

. De même pour la décharge : $u_C(0) = E$ et $\boxed{\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{\tau} = 0}$

$\rightsquigarrow$ solution : $u_C(t) = B.e^{-t/\tau} = E.e^{-t/\tau}$

B. Désintégration nucléaire (1er ordre en cinétique chimique) :

$dN = -\mathcal{P}.N(t)$ avec
- dN = nombre de désintégrations pendant dt
- N = nombre de noyaux restants à la date t.
- $\mathcal{P}$ = probabilité de désintégration entre t et $t+dt$.

Or : $\mathcal{P} = \lambda.dt$
où λ est la constante radioactive.

$$\Rightarrow dN = -\lambda.N.dt$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dN}{dt} + \lambda.N = 0}$$

- Soit : $N(t) = N_0.e^{-\lambda.t}$

②

C . Mécanismes réactionnels avec intermédiaire réactionnel B . $k_1 \neq k_2$

Soit : $\begin{cases} A \xrightarrow{k_1} B \text{ (ordre 1)} \\ B \xrightarrow{k_2} C \text{ (ordre 1)} \end{cases}$ le mécanisme traduisant le bilan : $A \rightarrow C$

- On peut écrire : $\begin{cases} -\dfrac{d[A]}{dt} = v_1 = k_1[A] & (1) \\ \dfrac{d[B]}{dt} = v_1 - v_2 = k_1.[A] - k_2.[B] & (2) \\ \dfrac{d[C]}{dt} = v_2 = k_2.[B] & (3) \end{cases}$

- De (1) : $\boxed{\dfrac{d[A]}{dt} + k_1.[A] = 0}$ $\rightsquigarrow$ $[A] = [A]_0 . e^{-k_1.t}$

- De (2) : $\boxed{\dfrac{d[B]}{dt} + k_2.[B] = k_1.[A]_0 . e^{-k_1 t}}$ (3)

$\rightsquigarrow [B] = \underbrace{K . e^{-k_2.t}}$ $\longrightarrow$ on utilise la "variation de la constante" :

$$[B] = K(t) . e^{-k_2 t}$$

$$\Rightarrow \frac{d[B]}{dt} = \frac{dK}{dt}.e^{-k_2 t} - k_2.K\,e^{-k_2.t}$$

$$\underset{\text{dans (3)}}{\Rightarrow} \frac{dK}{dt}.e^{-k_2 t} - \cancel{k_2.K.e^{-k_2.t}} + \cancel{k_2.K.e^{-k_2.t}} = k_1[A]_0.e^{-k_1 t}$$

$$\Rightarrow \frac{dK}{dt} = k_1[A]_0 . e^{(k_2-k_1)t}$$

$$\Rightarrow K = \frac{k_1.[A]_0}{k_2-k_1}.e^{(k_2-k_1).t} + J$$

- D'où : $[B] = \left(\dfrac{k_1}{k_2-k_1}.[A]_0.e^{(k_2-k_1)t} + J\right).e^{-k_2 t}$

- Or : à $t = 0$, $[B] = 0$ $\rightsquigarrow$ $\dfrac{k_1[A]_0}{k_2-k_1} + J = 0 \Rightarrow J = -\dfrac{k_1[A]_0}{k_2-k_1}$

$$\Rightarrow \boxed{[B] = \frac{k_1}{k_2 - k_1} \cdot [A]_0 \cdot \left(e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}\right)}$$

- Pour [C] : $\quad [A]_0 = [A] + [B] + [C]$

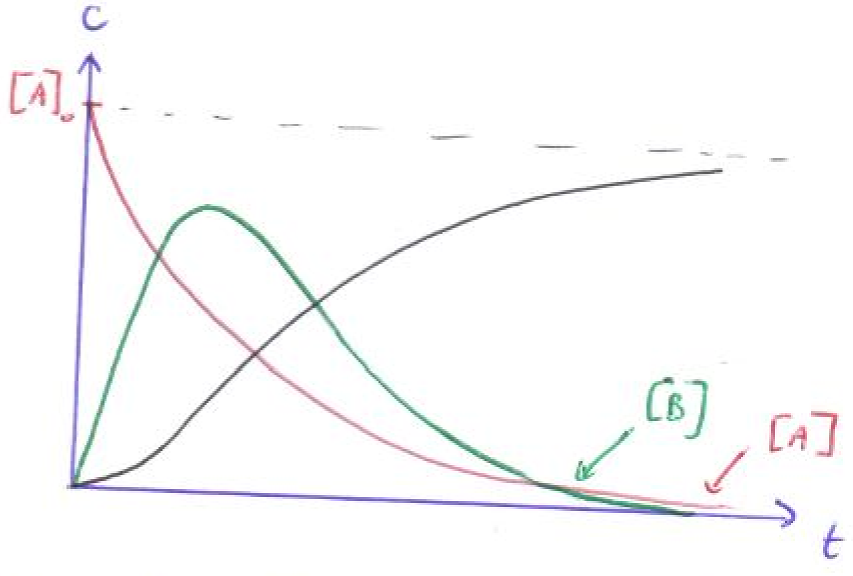
$$\Rightarrow [C] = [A]_0 - [A] - [B]$$

$$\Rightarrow [C] = [A]_0 - [A]_0 \cdot e^{-k_1 t} - \frac{k_1 [A]_0}{k_2 - k_1} \cdot \left(e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}\right)$$

$$\Rightarrow [C] = [A]_0 \cdot \left(1 - \left(1 + \frac{k_1}{k_2 - k_1}\right) e^{-k_1 t} + \frac{k_1}{k_2 - k_1} \cdot e^{-k_2 t}\right).$$

$$\Rightarrow \boxed{[C] = [A]_0 \cdot \left(1 - \frac{1}{k_2 - k_1} \cdot \left(k_2 \cdot e^{-k_1 t} - k_1 \cdot e^{-k_2 \cdot t}\right)\right)}$$

- Graphe :



* Rq : faire les cas extrêmes $k_1 \gg k_2$ et $k_1 \ll k_2$.