1BCPST2

Télescopage dans une somme

Le télescopage est une technique permettant de simplifier une somme dont le terme général est la différence de deux termes consécutifs d'une suite.

À l'écrit, il y a trois présentations possibles :

1.
   - $\displaystyle\sum_{k=p}^{q}(u_k - u_{k+1}) = (u_k)_{k=p} - (u_{k+1})_{k=q} = u_p - u_{q+1}$ par télescopage.
   - Variante : $\displaystyle\sum_{k=p}^{q}(u_k - u_{k-1}) = (u_k)_{k=q} - (u_{k-1})_{k=p} = u_q - u_{p-1}$ par télescopage.
2.
   - $\displaystyle\sum_{k=p}^{q}(u_k - u_{k+1}) = u_p - \cancel{u_{p+1}} + \cancel{u_{p+1}} - \cancel{u_{p+2}} + \cdots + \cancel{u_q} - u_{q+1} = u_p - u_{q+1}.$
   - Variante : $\displaystyle\sum_{k=p}^{q}(u_k - u_{k-1}) = u_q - \cancel{u_{q-1}} + \cancel{u_{q-1}} - \cancel{u_{q-2}} + \cdots + \cancel{u_p} - u_{p-1} = u_q - u_{p-1}$
3. On applique la linéarité de Σ, on effectue un changement d'indice dans une des deux sommes obtenues puis on décroche un terme dans chacune de ces deux sommes.
   - $\displaystyle\sum_{k=p}^{q}(u_k - u_{k+1}) = \sum_{k=p}^{q}u_k - \sum_{k=p}^{q}u_{k+1}$ on effectue le changement d'indice $k+1=i$ dans la 2ème somme
   $$= \sum_{k=p}^{q}u_k - \sum_{i-1=p}^{i-1=q}u_i = \sum_{k=p}^{q}u_k - \sum_{i=p+1}^{q+1}u_i = \left(u_p + \sum_{k=p+1}^{q}u_k\right) - \left(u_{q+1} + \sum_{i=p+1}^{q}u_i\right)$$
   $$= u_p - u_{q+1} + \cancel{\sum_{k=p+1}^{q}u_k} - \cancel{\sum_{i=p+1}^{q}u_i} = u_p - u_{q+1}$$
   - Variante :
   $\displaystyle\sum_{k=p}^{q}(u_k - u_{k-1}) = \sum_{k=p}^{q}u_k - \sum_{k=p}^{q}u_{k-1}$ on effectue le changement d'indice $k-1=i$ dans la 2ème somme
   $$= \sum_{k=p}^{q}u_k - \sum_{i+1=p}^{i+1=q}u_i = \sum_{k=p}^{q}u_k - \sum_{i=p-1}^{q-1}u_i = \left(u_q + \sum_{k=p}^{q-1}u_k\right) - \left(u_{p-1} + \sum_{i=p}^{q-1}u_i\right)$$
   $$= u_q - u_{p-1} + \cancel{\sum_{k=p}^{q-1}u_k} - \cancel{\sum_{i=p}^{q-1}u_i} = u_q - u_{p-1}$$

Les deux premières présentations sont possibles lorsque le télescopage est avéré. La troisième est possible dans tous les cas.