1BCPST2 Plan d'étude d'une fonction numérique d'une variable réelle

On présente ici les principales questions qui se posent lorsqu'on doit faire une étude détaillée d'une fonction réelle d'une variable réelle.
Il est important de signaler que le plan d'étude exposé ici est théorique, et qu'en général un exercice ou un problème ne requiert pas le traitement exhaustif des étapes suivantes. On ne répondra qu'aux questions posées (ce qui n'empêche pas de prendre des initiatives), en s'interdisant de traiter mécaniquement tous les points du plan d'étude (ce qui, au minimum, fait perdre du temps).
Pour certaines de ces questions, il s'agit simplement de rappeler une méthode déjà utilisée au niveau de la Terminale.

Cette liste correspond à un protocole auquel l'étudiant doit se référer pour répondre à un énoncé du type : "Étudier la fonction f définie par ..." . On ne perdra pas de vue que la plupart des études demandées ont pour objectif de dresser un tableau de variation pour lequel il suffit de mener une étude *a minima*. Ce tableau de variation sera rempli en fonction de ce qui est demandé. En particulier, on ne calculera pas de limites non demandées sauf si cela s'avère utile pour la suite de l'exercice.
On suppose donné un repère orthogonal $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ du plan et on note $\mathcal{C}_f$ la courbe de f dans ce repère.

1. Déterminer l'**ensemble de définition** de f noté $\mathcal{D}_f$.
2. Éventuellement **réduire l'ensemble** sur lequel on va étudier f (appelé ensemble d'étude) en utilisant des propriétés géométriques de $\mathcal{C}_f$:
   - si f est **paire**, alors sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées $(O, \overrightarrow{\jmath})$. Ensemble d'étude : $\mathcal{D}_f \cap [0, +\infty[$;
   - si f est **impaire**, alors sa courbe est symétrique par rapport à l'origine O. Ensemble d'étude : $\mathcal{D}_f \cap [0, +\infty[$;
   - si f est **T-periodique** alors $\mathcal{C}_f$ est invariante par translation de vecteur $k\overrightarrow{\imath}$ ($k \in \mathbb{Z}$). Ensemble d'étude : $\mathcal{D}_f \cap \left]-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$.

   Donc si f est paire (ou impaire) et T-periodique alors on peut prendre comme ensemble d'étude : $\mathcal{D}_f \cap \left[0, \frac{T}{2}\right]$.
3. Étudier la **continuité** sur l'ensemble d'étude.
   Pour démontrer qu'une fonction est continue, on peut utiliser les théorèmes d'opérations algébriques et de composition de fonctions continues (sur un domaine) ou bien revenir à la définition (en un point).
4. Rechercher les **prolongements par continuité** éventuels aux bornes de l'ensemble d'étude où f n'est pas définie.
5. Étudier la **dérivabilité**. Faire également cette étude en les points où f a été prolongée.
   Pour démontrer qu'une fonction est dérivable, on peut utiliser les théorèmes d'opérations algébriques et de composition de fonctions dérivables (sur un domaine) ou bien revenir à la définition (en un point).
6. Étudier les **variations** de f (en général en déterminant le signe de la dérivée).
   On pourra être amené à dériver plusieurs fois et/ou à utiliser une quantité conjuguée (lorsque l'expression contient une racine ou une valeur absolue).
7. Déterminer les **limites aux bornes** de l'ensemble d'étude.
8. Dresser le **tableau de variation**.
   On conviendra que les flèches obliques traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction.
   Une simple référence au tableau de variations suffira à justifier l'existence et l'unicité d'une solution de l'équation $f(x) = \alpha$.
9. Déterminer les **asymptotes horizontales et obliques** : voir le document *Asymptotes horizontales et obliques*.
   Cela suppose que l'ensemble d'étude contienne un intervalle non borné.

   La position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à son éventuelle asymptote d'équation $y = ax + b$ est donnée par le signe de $u(x) = f(x) - (ax + b)$. Au voisinage de $+\infty$, le signe de $u(x)$ est égal à celui d'un équivalent.
   On pratique la même analyse pour l'étude des asymptotes à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $-\infty$.
10. Tracer **la courbe**.
    On fera notamment apparaitre :
    - ses asymptotes s'il y en a,
    - ses points remarquables :
      — extremums relatifs ou absolus (annulation de la dérivée avec changement de signe),
      — points d'intersection avec les axes,
    - ses tangentes remarquables.
      La position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à sa tangente en x_0 est donnée par le signe de $v(t) = f(x_0 + t) - \big(f(x_0) + f'(x_0)t\big)$ pour t proche de 0. Au voisinage de 0, le signe de $v(t)$ est égal à celui d'un équivalent.

    On rappelle l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse x_0 : $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
    Si f est continue en x_0 et que son taux d'accroissement en x_0 a pour limite $+\infty$ ou $-\infty$ alors la courbe de f admet une tangente verticale en x_0 (retenir l'exemple de la fonction racine carrée en 0).