Exercice 1 **Convergence, divergence**

Étudier le comportement des suites ci-dessous lorsque n tend vers $+\infty$:

1. $u_n = \cos\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$, $v_n = n\sin\left(\frac{n+1}{n}\right)$, $w_n = \frac{2^n+n^3+\ln n}{2^n+n!}$, $t_n = \frac{5n-6}{n^2+2n+4}$.
2. $u_n = \frac{2n+(-1)^n}{3n+(-1)^n}$, $v_n = \frac{\sqrt{4n^2+3n+1}}{5n-6}$, $w_n = \frac{2^n-5^n}{2^n+5^n}$, $t_n = n^{\frac{1}{n^2}} - 1$.
3. $u_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$, $v_n = \frac{n-\sqrt{n^2+1}}{n-\sqrt{n^2-1}}$, $w_n = \frac{\cos(n+n^2)}{n+1}$.

Exercice 2 **Suites extraites**

Étudier la convergence des suites proposées en considérant la suite des termes d'indices pairs et celle des termes d'indices impairs. $u_n = \frac{2^{n+1}-(-2)^n}{2^{n+1}+(-2)^n}$, $v_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$.

Exercice 3 **Encadrement**

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum\limits_{k=0}^{2n+1} \frac{n}{n^2+k}$.

1. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{2n}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{2(n+1)}{n}$.
2. En déduire la convergence de (u_n) et sa limite. Valider ce résultat avec Python.

Exercice 4

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Encadrer $\lfloor nx \rfloor$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$. Vérifier avec Python.
2. Déterminer a_k de sorte que $\frac{n!}{n^n} = \prod\limits_{k=1}^{n} a_k$. Encadrer $\prod\limits_{k=2}^{n} a_k$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n}$.
3. Encadrer $\sum\limits_{k=0}^{n-2} k!$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n!}\sum\limits_{k=0}^{n} k!$. Vérifier avec Python.

Exercice 5

1. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$. Vérifier ces deux inégalités avec une représentation graphique générée par un programme Python.
2. En déduire la limite de $u_n = \prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$. Vérifier ceci à l'aide d'un programme.

Exercice 6

Soient $a \in \mathbb{R}_+$ et (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{3+u_n}{2(1+u_n)} \end{cases}$

1. Démontrer que tous les termes de la suite sont positifs.
2. Montrer que si la suite (u_n) converge alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.
3. Établir l'égalité : $u_{n+1} - 1 = \frac{1-u_n}{2(1+u_n)}$.
4. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1}-1| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - 1|$.
5. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n - 1| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}|u_1 - 1|$. En déduire la limite de (u_n).
6. Étudier $x \mapsto \frac{3+x}{2(1+x)}$ sur $\mathbb{R}_+$ et en déduire un rang à partir duquel $|u_n - 1| \leqslant 10^{-6}$.
7. Écrire une fonction Python *seuil* qui renvoie le plus petit n tel que $|u_n - 1| \leqslant 10^{-6}$. Ce programme n'utilisera pas les résultats des questions précédentes.

Exercice 7 **Suites monotones**

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
2. Démontrer par l'absurde que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n^2 \geqslant 2n + u_0^2$ et retrouver la limite de (u_n).
4. Représenter les 100 premiers termes de (u_n), $(\sqrt{2n+1})$, $(\sqrt{2n}+1)$ avec $u_0 = 1$.

Exercice 8 (Série harmonique)

On considère la suite de terme général $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ définie sur $\mathbb{N}^*$.

1. Prouver que $u_{2n} - u_n \geqslant \frac{1}{2}$. Déterminer le sens de variation de (u_n).
2. Démontrer par l'absurde que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
3. Soit k un entier naturel non nul, montrer que : $\frac{1}{k+1} < \ln(k+1) - \ln(k) < \frac{1}{k}$.
4. En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\ln(n+1) < u_n < \ln(n) + 1$. Retrouver le résultat de la question 2 et montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\sqrt{n}} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\ln(n)} = 1$.
5. Soit $v_n = u_n - \ln(n)$. Montrer que (v_n) converge et que sa limite appartient à $[0,1[$.
6. Écrire une fonction qui calcule le plus petit n (noté $n(a)$) tel que $u_n \geqslant a$. Conjecturer le comportement du quotient $\frac{n(a)}{\mathrm{e}^a}$ lorsque a tend vers $+\infty$.

Exercice 9

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2n+2k-1}$.

1. Montrer que (u_n) est strictement monotone. Écrire un programme qui calcule u_n.
2. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, encadrer $\frac{1}{2n+2k-1}$ par des expressions ne dépendant que de n.
3. En déduire la convergence de la suite (u_n) et l'encadrement : $\frac{1}{3} < \lim(u_n) \leqslant \frac{1}{2}$.

Exercice 10 **Suites adjacentes**

Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. On définit deux suites u et v par :

$u_0 = a$, $v_0 = b$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{2u_nv_n}{u_n+v_n}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n+v_n}{2}$.

1. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < v_n$ puis donner la monotonie des suites u et v.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \frac{v_n - u_n}{2}$ puis $0 \leqslant v_n - u_n \leqslant \frac{v_0-u_0}{2^n}$. Déterminer, si elle existe, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n$. Écrire une fonction qui renvoie u_n, v_n.
3. Déduire des questions précédentes la convergence des deux suites (u_n) et (v_n).

4. Montrer que la suite $(u_n v_n)$ est constante. En déduire la limite des suites u et v.

Exercice 11

Dans chacun des deux cas suivants, montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Que peut-on en déduire ? Déterminer une approximation de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ à 10^{-6} près. On écrira également une fonction de paramètre p qui renvoie une approximation de la limite à p près. Vérifier avec cette fonction que la limite est e pour 1. et $\ln 2$ pour 2.

1. $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n\times n!}$, $(n \geqslant 1)$. Représenter $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. $u_n = a_{2n}$ et $v_n = a_{2n+1}$ avec $a_q = \sum\limits_{k=1}^{q} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$, $(q \geqslant 2)$. Représenter (u_n) et (v_n).

Limites et équivalents

Exercice 12

Déterminer la limite éventuelle de chacune des suites :

1. $u_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, $\quad v_n = n\sin\frac{1}{n^3}$, $\quad w_n = n^{\frac{\cos n}{n}}$.
2. $u_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$, $\qquad v_n = n^{\frac{1}{n}} - 1$, $\qquad w_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$.
3. $u_n = \ln\left(\cos^2(\frac{1}{n})\right)$, $\qquad v_n = \mathrm{e}^{\tan(\frac{1}{\sqrt{n}})} - 1$, $\quad w_n = n + (-1)^n n^2 - 3\ln(n) + 2^n$.
4. $u_n = n\Big(\ln(n+1) - \ln(n)\Big)$, $v_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$, $\;w_n = \frac{e^{\sqrt{n}}}{2^n}$ (pas d'équivalent de w_n)

Exercice 13

On considère les trois suites définies par $u_0 = 0$, $v_0 = \frac{1}{2}$, $w_0 = 1$ et vérifiant la même relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1} = \sqrt{1+t_n^2}$.

1. Conjecturer les expressions de u_n et de w_n puis démontrer cette conjecture.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$. En déduire la limite et un équivalent de v_n.

Suites définies par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$

Exercice 14

Soit f la fonction définie sur $[-2,+\infty[$ par $f : x \mapsto \sqrt{2+x}$.

1. (a) Étudier les variations de f.
   (b) Chercher les points fixes de f (ie résoudre l'équation $f(x) = x$).
2. Soit la suite $(u_n)_n$ définie par : $u_0 = 0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Dans un plan rapporté à un repère orthonormé, tracer $\mathscr{C}_f$ et la droite d'équation $y = x$ puis construire les premiers termes de (u_n) et conjecturer son sens de variation et sa limite. Écrire un programme qui trace $\mathscr{C}_f$.
   (b) Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 2]$. Qu'en déduit-on pour la suite (u_n) ?
   (c) Montrer que $(u_n)_n$ est monotone et préciser son sens de variation.
   (d) En déduire que $(u_n)_n$ converge.
   (e) Calculer sa limite ℓ.
3. À l'aide de la représentation graphique de la question 2.(a), deviner le comportement de (u_n) lorsque $u_0 \in [-2,+\infty[$. Valider avec une fonction Python.
4. Écrire une fonction Python *seuil* de paramètres *u0, p* qui renvoie le plus petit indice n tel que $|u_n - \ell| \leqslant p$. On supposera $u_0 \in [-2,+\infty[$ et $p > 0$.

Exercice 15

Soit f la fonction définie sur $]-\infty, 2]$ par $f(x) = \sqrt{2-x}$.

1. (a) Étudier les variations de f.
   (b) Chercher les points fixes de f (ie résoudre l'équation $f(x) = x$).
2. Soit $(u_n)_n$ la suite définie par : $u_0 = 0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Dans un repère orthonormé, tracer $\mathscr{C}_f$ et la droite d'équation $y = x$ puis construire les premiers termes de (u_n) et conjecturer les sens de variation des suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}). Écrire un programme qui trace $\mathscr{C}_f$.
   (b) Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 2]$. Qu'en déduit-on pour la suite (u_n) ?
3. Soit h la fonction définie par $h(x) = f \circ f(x)$. Justifier que h est bien définie sur $[0, 2]$ et étudier son sens de variation sur cet intervalle.
4. (a) Vérifier que $u_{2(n+1)} = h(u_{2n})$ et $u_{2(n+1)+1} = h(u_{2n+1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Montrer que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones. En déduire que ces deux suites sont convergentes.
   (c) Établir l'équivalence $h(x) = x \iff x^4-4x^2+x+2 = 0$ et $x \geqslant 0$ et $2-x^2 \geqslant 0$.
   (d) Vérifier que 1 et -2 sont racines du polynôme $x^4 - 4x^2 + x + 2$ et en déduire que h a un unique point fixe ℓ que l'on calculera.
   (e) En déduire les limites de (u_{2n}) et (u_{2n+1}) et la convergence de (u_n) vers ℓ.
5. À l'aide de la représentation graphique de la question 2.(a), deviner le comportement de (u_n) lorsque $u_0 \in]-\infty, 2[$. Valider avec une fonction Python.

Suites définies de façon implicite

Exercice 16

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on considère la fonction $f_n : x \longmapsto x^n + x^{n-1} + \cdots + x = \sum\limits_{k=1}^{n} x^k$.

1. Étudier les variations de f_n sur $\mathbb{R}_+$.
   En déduire que l'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution u_n dans $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+, f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$. En déduire que (u_n) est monotone.
3. Montrer que (u_n) converge.
4. Exprimer $f_n(x)$ sans le symbole $\sum$.
5. Montrer que $u_2 < 1$ et en déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
6. Écrire une fonction Python de paramètres n, p qui renvoie une approximation de u_n à p près par la méthode de dichotomie.