1BCPST2 **Quelques conseils pour choisir la bonne formule en probabilités**

On appellera (de façon un peu arbitraire) l'événement B "cause" et l'événement A "conséquence" si l'énoncé d'un exercice nous donne la valeur de $\mathbb{P}(A|B)$. Si on cherche :

1. **La probabilité qu'au moins un événement d'une famille se réalise.**
   - On effectue la somme des probabilités de ces événements si ceux-ci sont 2 à 2 incompatibles.
   - Sinon, s'il n'y a que deux événements dans cette famille, on utilise la formule du crible.
   - Sinon on peut essayer de passer à l'événement contraire pour se ramener au troisième cas.

   Exemples.

   (a) Dans une ville 25% de la population utilise les transports en commun, 20% se déplace en voiture, 15% utilise un vélo, 5% utilise une trottinette sans moteur et le reste se déplace à pied. On suppose que chaque personne utilise un unique moyen de transport. Déterminer la proportion de la population n'utilisant pas un moyen de transport motorisé.

   Réponse. On choisit une personne au hasard dans cette population. On note V, T et P les événements : "la personne se déplace en vélo", "la personne se déplace en trottinette" et "la personne se déplace à pied". On cherche $\mathbb{P}(V\cup T\cup P)$. Les événements V, T, P étant 2 à 2 incompatibles on a $\mathbb{P}(V\cup T\cup P)=\mathbb{P}(V)+\mathbb{P}(T)+\mathbb{P}(P)=0,15+0,05+(1-0,25-0,2-0,15-0,05)=0,55$. Autre méthode : l'événement contraire est l'union des déplacements en TC et en voiture donc $1-\mathbb{P}(V\cup T\cup P)=0,25+0,2=0,45$ donc $\mathbb{P}(V\cup T\cup P)=0,55$.

   (b) Dans une classe 40% des élèves on choisi l'espagnol, 20% l'allemand et 10% ces deux langues. Déterminer la proportion des élèves ayant choisi au moins l'une de ces deux langues.

   Réponse. On choisit un élève au hasard dans cette classe. on note E et A les événements : "l'élève a choisi l'espagnol" et "l'élève a choisi l'allemand". On cherche $\mathbb{P}(E\cup A)$. $\mathbb{P}(E\cup A)=\mathbb{P}(E)+\mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(E\cap A)=0,4+0,2-0,1=0,5$.

   (c) Trois personnes laissent leur manteau au vestiaire. À la fin du spectacle le groom, fatigué, distribue les manteaux au hasard. Calculer la probabilité qu'au moins l'une des trois personnes ne se voit pas remettre son manteau.

   Réponse. On note P_i : "la $i^{\text{ème}}$ personne ne se voit pas remettre son manteau. On cherche $\mathbb{P}(P_1\cup P_2\cup P_3)$.
   $\mathbb{P}(P_1\cup P_2\cup P_3)=1-\mathbb{P}\left(\overline{P_1\cup P_2\cup P_3}\right)=1-\mathbb{P}\left(\overline{P_1}\cap\overline{P_2}\cap\overline{P_3}\right)=1-\mathbb{P}\left(\overline{P_1}\right)\mathbb{P}_{\overline{P_1}}\left(\overline{P_2}\right)\mathbb{P}_{\overline{P_1}\cap\overline{P_2}}\left(\overline{P_3}\right)=1-\frac{1}{3}.\frac{1}{2}.1=\frac{5}{6}$

2. **La probabilité d'une conséquence sachant une cause.**
   - On n'utilise aucune formule, cette probabilité conditionnelle est donnée dans l'énoncé.

3. **La probabilité que tous les événements d'une famille se réalisent.**
   - On effectue le produit des probabilités de ces événements s'ils sont indépendants.
   - Sinon on utilise la formule des probabilités composées. Dans ce cas, on essaiera de mettre l'intersection de ces événements sous la forme : $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\cdots$ de façon à ce que l'on connaisse l'influence de la réalisation de $A_1\cap\cdots\cap A_i$ sur A_{i+1}.
   - Si les 2 premières méthodes ne s'appliquent pas, on peut essayer de calculer la probabilité de l'événement contraire.

   Exemples.

   (a) On considère trois urnes contenant respectivement les proportions p_1,p_2,p_3 de boules rouges. On tire de façon indépendante une boule dans chacune des trois urnes. Calculer la probabilité qu'aucune des boules ne soit rouge.

   Réponse. On note R_i : "on tire une boule rouge de la $i^{\text{ème}}$ urne". Par hypothèse $\mathbb{P}(R_i)=p_i$.
   On cherche $\mathbb{P}\left(\overline{R_1}\cap\overline{R_2}\cap\overline{R_3}\right)$. Les trois tirages sont indépendants donc les événements $\overline{R_1}$, $\overline{R_2}$ et $\overline{R_3}$ sont indépendants d'où $\mathbb{P}\left(\overline{R_1}\cap\overline{R_2}\cap\overline{R_3}\right)=\mathbb{P}\left(\overline{R_1}\right)\mathbb{P}\left(\overline{R_2}\right)\mathbb{P}\left(\overline{R_3}\right)=(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)$.

   (b) Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire, indiscernable au toucher. On tire une boule, on note sa couleur et on la remet dans l'urne avec p boules de sa couleur. On note A_i l'événement "on tire une blanche au i ème coup". Calculer la probabilité de tirer n boules blanches d'affilée.

   Réponse. $\mathbb{P}(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n)\overset{\text{FPC}}{=}\mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(A_2|A_1)\ldots\mathbb{P}(A_n|A_1\cap\cdots\cap A_{n-1})=\frac{1}{2}\times\frac{1+p}{2+p}\times\cdots\times\frac{1+(n-1)p}{2+(n-1)p}$.

   (c) Dans une population on appelle A le groupe des individus dont la taille est strictement inférieure à $\mu+2\sigma$ et B le groupe des individus dont la taille est strictement supérieure à $\mu-2\sigma$. On note a et b les proportions respectives des individus de A et B par rapport à la population. Déterminer la proportion des individus dont la taille est strictement comprise entre $\mu-2\sigma$ et $\mu+2\sigma$.

   Réponse. On réalise l'expérience de pensée qui consiste à choisir au hasard un individu de la population et on note A et B les événements : "l'individu appartient à A" et "l'individu appartient à B". On cherche $\mathbb{P}(A\cap B)$.
   $\mathbb{P}(A\cap B)=1-\mathbb{P}\left(\overline{A\cap B}\right)=1-\mathbb{P}\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)=1-\left(\mathbb{P}\left(\overline{A}\right)+\mathbb{P}\left(\overline{B}\right)\right)$ car $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont incompatibles, en effet la taille d'un individu ne peut pas être à la fois supérieure ou égale à $\mu+2\sigma$ et inférieure ou égale à $\mu-2\sigma$.
   $\mathbb{P}(A\cap B)=1-P\left(\overline{A}\right)-P\left(\overline{B}\right)=1-(1-\mathbb{P}(A))-(1-\mathbb{P}(B))=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-1=a+b-1$.

4. **La probabilité d'un événement qui peut se réaliser de plusieurs façons.**
   • On utilise la formule des probabilités totales sous l'une de ses deux formes. Pour déterminer le SCE associé à cette formule, il faut alors se poser la question : "Comment l'événement dont on cherche la probabilité peut se réaliser ?"
   Exemple.
   (a) On dispose de trois pièces A, B, C de loi

résultats \ pièces	A	B	C
pile	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{6}$
face	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

   et un dé équilibré. On commence par lancer le dé. Si on obtient 1, 2 ou 3 alors on lance la pièce A, si on obtient 4 alors on lance la pièce B, sinon on lance la pièce C. Calculer la probabilité d'obtenir *pile*.
   Réponse. On note P le fait d'obtenir *pile*. Les événements A, B, C signifient que l'on a joué avec respectivement les pièces A, B, C. La famille (A, B, C) est un SCE car quelle que soit l'issue de l'expérience, un et un seul des ces trois événements est réalisé.
   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(P) &\overset{\text{FPT1}}{=} \mathbb{P}(A\cap P)+\mathbb{P}(B\cap P)+\mathbb{P}(C\cap P)\\ &\overset{\text{FPT2}}{=} \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}_A(P)+\mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}_B(P)+\mathbb{P}(C)\,\mathbb{P}_C(P)\\ &= \frac{3}{6}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{7}{12}\end{aligned}$$
   (b) Les proportions respectives de femmes et d'hommes porteurs du gène A dans la population sont égales à 7% et $\frac{1}{7}$. Quelle est la proportion de porteurs du gène A dans la population ?
   Réponse. On choisit au hasard une personne dans cette population. On note F et A les événements "la personne est une femme" et "la personne est porteuse du gène A". La proportion de personnes porteuses du gène A est égale à $\mathbb{P}(A)$. La famille $(F, \overline{F})$ est une SCE donc $\mathbb{P}(A) \overset{\text{FPT1}}{=} \mathbb{P}(F\cap A)+\mathbb{P}\left(\overline{F}\cap A\right)=\frac{7}{100}+\frac{1}{7}=\frac{49}{700}+\frac{100}{700}=\frac{149}{700}$.

5. **La probabilité d'une cause sachant une conséquence $\mathbb{P}_U(A)$.**
   Cela signifie que l'on connait $\mathbb{P}_A(U)$. Pour pouvoir appliquer la formule de Bayes il faut également connaitre $\mathbb{P}(A)$. Dans ces conditions on écrit $\mathbb{P}(A|U)=\dfrac{\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(U|A)}{\mathbb{P}(U)}$.
   • Si on connaît $\mathbb{P}(U)$ (donnée dans l'énoncé ou calculée précédemment) alors on passe à l'application numérique.
   • Sinon on applique la formule des proba totales au dénominateur avec un SCE $A, B, C, \ldots$ contenant l'évé$^{\text{nt}}$ A (d'où le nom de formule de probabilités des causes) : $\mathbb{P}(A|U)=\dfrac{\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(U|A)}{\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(U|A)+\mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(U|B)+\mathbb{P}(C)\,\mathbb{P}(U|C)+\cdots}$
   Exemples.
   (a) Un parc à huîtres contient trois espèces d'huître H_1, H_2 et H_3. Une huître sur 50 de l'espèce H_3 donne une perle. Les trois espèces sont équiréparties dans le parc et la proportion d'huîtres donnant une perle est seulement de 1%. On prélève une huître et on constate qu'elle n'a pas de perle, quelle est la probabilité qu'elle soit de l'espèce H_3 ?
   Réponse. Notons P, H_3 les événements : "l'huître prélevée n'a pas de perle" et "l'huitre prélevée appartient à l'espèce H_3." Bien que l'on suppose que l'événement P est réalisé, le modèle ne contient pas cette information. Ainsi, la probabilité que l'on doit prendre en compte est $\mathbb{P}_P$ et non $\mathbb{P}$.
   On cherche $\mathbb{P}_P(H_3)$. D'après la formule de Bayes $\mathbb{P}_P(H_3)=\dfrac{\mathbb{P}(H_3)\,\mathbb{P}_{H_3}(P)}{\mathbb{P}(P)}=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{49}{50}}{\frac{99}{100}}=\frac{98}{297}\approx 33,0\%$.
   (b) Il fait beau 300 j/an. Quand il fait beau Albert sort 9 fois sur 10, et quand il fait mauvais Albert sort 6 fois moins souvent que lorsqu'il fait beau. Un jour Albert est sorti, calculer la probabilité qu'il fasse beau ce jour là.
   Réponse. On note S : "Albert est sorti" et B : "Il fait beau". On cherche $\mathbb{P}_S(B)$ et on connait $\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}_B(S)$ donc on va utiliser la formule de Bayes : $\mathbb{P}_S(B)=\dfrac{\mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}_B(S)}{\mathbb{P}(S)}$. On ne connait pas $\mathbb{P}(S)$ donc on va la calculer avec la formule des probabilités totales relative au SCE $\left(B, \overline{B}\right)$.
   $\mathbb{P}(S) \overset{\text{FPT2}}{=} \mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}_B(S)+\mathbb{P}\left(\overline{B}\right)\,\mathbb{P}_{\overline{B}}(S)=\frac{300}{365}\times\frac{9}{10}+\frac{65}{365}\times\frac{3}{20}=\frac{1119}{1460}$.
   Par report $\mathbb{P}_S(B)=\frac{300}{365}\times\frac{9}{10}\times\frac{1460}{1119}=\frac{1080}{1119}\approx 96,5\%$

6. **La probabilité $\mathbb{P}_B(A)$ lorsqu'on ne connaît pas $\mathbb{P}_A(B)$.**
   • On revient à la définition d'une probabilité conditionnelle : $\mathbb{P}_B(A)=\dfrac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$.
   • Ou bien on applique la formule de Bayes et on se débrouille pour calculer $\mathbb{P}_A(B)$
   Exemples.

(a) Une population d'insectes est touchée par deux maladies uniquement : M_1 et M_2. On donne les proportions suivantes :

* individus malades : 80%,

* individus touchés par la maladie M_1 : 60%,

* individus touchés par la maladie M_2 : 55%.

Déterminer la prévalence de la maladie M_2 chez les individus touchés par la maladie M_1 ainsi que la prévalence de la maladie M_1 chez les individus touchés par la maladie M_2.

Réponse. On choisit un insecte au hasard. On note : M_1 l'événement "l'insecte est atteint de la maladie M_1" et M_2 l'événement "l'insecte est atteint de la maladie M_2".

La prévalence de la maladie M_2 chez les individus touchés par la maladie M_1 est la proportion des individus touchés par M_2 parmi ceux qui sont atteints par M_1 c'est-à-dire $\mathbb{P}(M_2|M_1)$.

Par la formule du crible $\mathbb{P}(M_1 \cap M_2) = \mathbb{P}(M_1) + \mathbb{P}(M_2) - \mathbb{P}(M_1 \cup M_2) = \frac{60}{100} + \frac{55}{100} - \frac{80}{100} = \frac{35}{100}$.

Par définition $\mathbb{P}(M_2|M_1) = \dfrac{\mathbb{P}(M_1 \cap M_2)}{\mathbb{P}(M_1)} = \frac{35}{\cancel{100}} \times \frac{\cancel{100}}{60} = \frac{7}{12}$.

la prévalence de la maladie M_1 chez les individus touchés par la maladie M_2 est égale à $\mathbb{P}(M_1|M_2) = \dfrac{\mathbb{P}(M_1 \cap M_2)}{\mathbb{P}(M_2)} = \frac{35}{\cancel{100}} \times \frac{\cancel{100}}{55} = \frac{7}{11}$.

(b) Un parc à huîtres contient trois espèces d'huître H_1, H_2 et H_3. Une huître H_1 a deux fois plus de chances de donner une perle qu'une huître H_2 qui elle-même a deux fois plus de chances de donner une perle qu'une huître H_3. Les trois espèces sont équiréparties dans le parc et la proportion d'huîtres donnant une perle est de 7%. On prélève une huître et on constate qu'elle a une perle, quelle est la probabilité qu'elle soit de l'espèce H_3 ?

Réponse. Notons P, H_1, H_2, H_3 les événements respectifs : "l'huitre prélevées a une perle, appartient à l'espèce H_1, appartient à l'espèce H_2, appartient à l'espèce H_3." Bien que l'on suppose que l'événement P est réalisé, le modèle ne contient pas cette information. Ainsi, la probabilité que l'on doit prendre en compte est $\mathbb{P}_P$ et non $\mathbb{P}$.

On cherche $\mathbb{P}_P(H_3)$. D'après la formule de Bayes $\mathbb{P}_P(H_3) = \dfrac{\mathbb{P}(H_3)\,\mathbb{P}_{H_3}(P)}{\mathbb{P}(P)}$. L'énoncé nous donne $\mathbb{P}(H_3) = \frac{1}{3}$ et $\mathbb{P}(P) = \frac{7}{100}$ mais il ne nous donne pas $\mathbb{P}_{H_3}(P)$. Appliquons la formule des probabilités totales à P selon le SCE (H_1, H_2, H_3) : $\mathbb{P}(P) = \mathbb{P}(H_1)\,\mathbb{P}_{H_1}(P) + \mathbb{P}(H_2)\,\mathbb{P}_{H_2}(P) + \mathbb{P}(H_3)\,\mathbb{P}_{H_3}(P)$.

Notons $a = \mathbb{P}_{H_3}(P)$. L'énoncé nous donne $\mathbb{P}(H_1) = \mathbb{P}(H_2) = \mathbb{P}(H_3) = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}_{H_2}(P) = 2a$ et $\mathbb{P}_{H_1}(P) = 4a$. Reportons ces valeurs dans la formule précédente : $\frac{7}{100} = \frac{1}{3} \times 4a + \frac{1}{3} \times 2a + \frac{1}{3} \times a$ d'où $\frac{7}{100} = \frac{7a}{3}$ et donc $a = \frac{3}{100}$.

Par report, $\mathbb{P}_P(H_3) = \frac{1}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{\cancel{100}} \times \frac{\cancel{100}}{7} = \frac{1}{7} \approx 14,3\%$.