Mathématiques

Lycée THIERS
Année 23-24

Devoir surveillé n° 5

1BCPST 2

14 février 2024
Durée : 2h

Qualité de la rédaction, clarté des raisonnements, présentation, orthographe et ponctuation font partie des critères de notation. Il est vivement recommandé de lire attentivement les questions et d'*encadrer les résultats*. L'usage des calculatrices est ***interdit***.

Exercice 1. *Système d'équations non linéaires à paramètres*

1. Les trois inconnues sont strictement positives donc on peut appliquer le logarithme,

$$\boxed{(S) \iff \begin{cases} \ln y + \ln z = 0 \\ \ln x + \ln z = 1 \\ \ln x + \ln y + a \ln z = b \end{cases} \iff (S') \begin{cases} Y + Z = 0 \\ X + Z = 1 \\ X + Y + aZ = b \end{cases}}$$

2. Appliquons à (S') l'opération élémentaire $L_2 \leftrightarrow L_1$ puis l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ et enfin $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$:

$$(S') \iff \begin{cases} X + Z = 1 \\ Y + Z = 0 \\ Y + (a-1)Z = b - 1 \end{cases} \iff \begin{cases} X + Z = 1 \\ Y + Z = 0 \\ (a-2)Z = b - 1 \end{cases}$$

Ce dernier système est échelonné. Si $a - 2 \neq 0$ alors le système a une unique solution.

Si $a = 2$ alors la dernière équation est $0 = b - 1$ donc le système admet au moins une solution si et seulement si $b - 1 = 0$.

$$\boxed{\text{Pour que } (S') \text{ admette au moins une solution il faut et il suffit que } a \neq 2 \text{ ou bien } a = 2 \text{ et } b = 1.}$$

3. (a) $(S') \iff \begin{cases} X + Z = 1 \\ Y + Z = 0 \\ Z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} X = 0 \\ Y = -1 \\ Z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \mathrm{e}^0 = 1 \\ y = \mathrm{e}^{-1} \\ z = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e} \end{cases}$

$$\boxed{\text{Si } a = 3 \text{ et } b = 2 \text{ alors l'unique solution de } (S') \text{ est } (0, -1, 1) \text{ et l'unique solution de } (S) \text{ est } (1, \tfrac{1}{\mathrm{e}}, \mathrm{e}).}$$

(b) $(S') \iff \begin{cases} X + Z = 1 \\ Y + Z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} X = 1 - Z \\ Y = -Z \end{cases}$

$$\boxed{\text{Si } a = 2 \text{ et } b = 1 \text{ alors les solutions de } (S') \text{ sont les triplets } (1-\lambda, -\lambda, \lambda) \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R} \text{ donc les solutions de } (S) \text{ sont les triplets } (\mathrm{e}^{1-\lambda}, \mathrm{e}^{-\lambda}, \mathrm{e}^{\lambda}) \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R} \text{ qui s'écrivent aussi } (\tfrac{\mathrm{e}}{\mu}, \tfrac{1}{\mu}, \mu) \text{ avec } \mu \in \mathbb{R}_+^*}$$

Exercice 2. *Autour du minimum*

1.
```
def mini(lst):
    m=lst[0]
    for t in lst:
        if t<m:
            m=t
    return m
```

2. ```python
def rgMini(lst):
    n,i=len(lst),0
    for k in range(n):
        if lst[k]<lst[i]:
            i=k
    return i
```

## Exercice 3. *Puissances de matrices et équations matricielles*

1. (a) Le calcul donne $\boxed{A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$ et $\boxed{A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$ donc $\boxed{A^2 = -A}$.

   (b) On sait que $A = \frac{1}{3}(M - I)$ donc $3A = M - I$ et $\boxed{M = I + 3A}$

   (c) Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $u_n \in \mathbb{R}$ tel que $M^n = I + u_n A$.
   *Initialisation.* $M^0 = I + u_0 A$ avec $u_0 = 0$ donc la propriété est vérifiée au rang 0.

   *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons qu'il existe $u_n \in \mathbb{R}$ tel que $M^n = I + u_n M$.
   $$\begin{aligned} M^{n+1} &= (I + u_n A)(I + 3A) \quad \text{d'après l'HR et la relation } M = I + 3A \\ &= I^2 + 3IA + u_n AI + 3u_n A^2 \quad \text{en développant} \\ &= I + (3 + u_n)A - 3u_n A \quad \text{car } I^2 = I \text{ et } IA = AI = A \text{ et } A^2 = -A \\ &= I + (-2u_n + 3)A \\ &= I + u_{n+1} A \quad \text{en posant } u_{n+1} = -2u_n + 3 \end{aligned}$$
   La propriété est vérifiée au rang $n + 1$.

   *Conclusion.* D'après le principe de récurrence on peut affirmer que
   $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ il existe } u_n \in \mathbb{R} \text{ tel que } M^n = I + u_n A}$.
   La relation de récurrence vérifiée par la suite $(u_n)$ est $\boxed{u_{n+1} = -2u_n + 3}$.
   Par conséquent $\boxed{(u_n) \text{ est une suite arithmético-géométrique.}}$

   (d) La suite $(u_n)$ est arithmético-géométrique. Le point fixe de $x \mapsto -2x + 3$ est 1.
   On a $u_{n+1} = -2u_n + 3$ et $1 = -2 \times 1 + 3$, par différence $u_{n+1} - 1 = -2(u_n - 1)$ donc $(u_n - 1)$ est géométrique de raison $-2$ et de premier terme $u_0 - 1 = -1$ d'où $u_n - 1 = -1(-2)^n$ et $\boxed{u_n = 1 - (-2)^n}$
   Par report, $\boxed{M^n = I + (1 - (-2)^n)A}$.
   $$\boxed{\text{La première colonne de } M^n \text{ est } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (1 - (-2)^n) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - (-2)^{n+1} \\ 1 - (-2)^n \\ 1 - (-2)^n \end{pmatrix}}$$

   (e) i. $X_{n+1} = MX_n$.

   ii. On montre facilement par récurrence que $X_n = M^n X_0$.

   iii. $M^n X_0 = M^n X_0 = M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$ première colonne de $M^n$

   D'après les questions 1d et 1(e)ii, $\boxed{\begin{cases} x_n = -1 - (-2)^{n+1} \\ y_n = 1 - (-2)^n \\ z_n = 1 - (-2)^n \end{cases}}$
```

2. (a) Le calcul donne $\boxed{J^2 = J}$.

   Démontrons par l'absurde que J n'est pas inversible. Pour cela on suppose que J est inversible. Multiplions la relation précédente à droite par J^{-1} : $J^2J^{-1} = JJ^{-1} \iff J = I$ ce qui est manifestement faux donc $\boxed{J \text{ n'est pas inversible}}$.

   (b) On conjecture et on démontre par une récurrence facile que $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ J^p = J$.

   (c) Pour tout $(u, v, u', v') \in \mathbb{R}^4$ on pourra, dans la suite de l'exercice, admettre l'équivalence

$$uI + vJ = u'I + v'J \iff u = u' \text{ et } v = v'$$

   i. Soient $(a, a', b, b') \in \mathbb{R}^4$. Étant donné que $J^2 = J$, on obtient en développant :
   $\boxed{(aI + bJ)(a'I + b'J) = aa'I + (ab' + a'b)J + bb'J^2 = aa'I + (ab' + a'b + bb')J \in \mathscr{E}}$

   ii. Soient $a, a', b, b' \in \mathbb{R}$. D'après la question précédente,
   $(aI + bJ)(a'I + b'J) = I \iff aa'I + (ab' + a'b + bb')J = 1I + 0J$
   $\iff \begin{cases} aa' = 1 \\ ab' + a'b + bb' = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a' = \frac{1}{a} \text{ car } a \neq 0 \\ ab' + a'b + bb' = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a' = \frac{1}{a} \\ ab' + \frac{b}{a} + bb' = 0 \end{cases}$
   $\iff \begin{cases} a' = \frac{1}{a} \\ (a+b)b' = -\frac{b}{a} \end{cases} \iff \begin{cases} a' = \frac{1}{a} \\ b' = -\frac{b}{a(a+b)} \text{ car } a + b \neq 0 \end{cases}$
   $\boxed{\text{L'unique solution de l'équation } (aI + bJ)(a'I + b'J) = I \text{ d'inconnues } a', b' \text{ est le couple } \left(\tfrac{1}{a}, -\tfrac{b}{a(a+b)}\right)}$
   $\boxed{\text{On en déduit que } aI + bJ \text{ est inversible et } (aI + bJ)^{-1} = \tfrac{1}{a}I - \tfrac{b}{a(a+b)}J.}$

   iii. On pose $X = aI + bJ$. D'après 2(c)i, $X^2 = a^2I + (2ab + b^2)J$
   $X^2 = I \iff a^2I + (2ab + b^2)J = 1I + 0J \iff \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 + 2ab = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 = 1 \\ b(b + 2a) = 0 \end{cases}$
   $\iff \begin{cases} a = 1 \text{ ou } a = -1 \\ b = 0 \text{ ou } b + 2a = 0 \end{cases}$
   $\iff (a, b) \in \Big\{(1, 0), (-1, 0), (1, -2), (-1, 2)\Big\}$
   $\boxed{\text{Les solutions dans } \mathscr{E} \text{ de l'équation } X^2 = I \text{ sont } I,\ -I,\ I - 2J,\ -I + 2J.}$

   iv. On pose $X = aI + bJ$. D'après 2(c)i, $X^2 = a^2I + (2ab + b^2)J$
   $X^2 = X \iff a^2I + (2ab + b^2)J = aI + bJ \iff \begin{cases} a^2 = a \\ b^2 + 2ab = b \end{cases} \iff \begin{cases} a(a-1) = 0 \\ b(b + 2a - 1) = 0 \end{cases}$
   $\iff \begin{cases} a = 0 \text{ ou } a = 1 \\ b = 0 \text{ ou } b + 2a - 1 = 0 \end{cases}$
   $\iff (a, b) \in \Big\{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, -1)\Big\}$
   $\boxed{\text{Les solutions dans } \mathscr{E} \text{ de l'équation } X^2 = X \text{ sont } 0_3,\ J,\ I,\ I - J.}$

   v. D'après l'une des deux questions précédentes on peut affirmer qu'une équation matricielle de degré 2 peut admettre plus de 2 solutions.

   (d) i. Par identification des coefficients on trouve que $M = aI + bJ \iff a = -2$ et $b = 3$ donc $\boxed{M = -2I + 3J \in \mathscr{E}}$.

   ii. $-2I$ et $3J$ commutent. D'après la formule du binôme de Newton on a :

$M^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-2I)^k(3J)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-2)^k 3^{n-k} J^{n-k}$

Or on sait d'après 2.(a) que $J^p = J$ pour $p \in \mathbb{N}^*$ donc on obtient en décrochant le dernier terme :

$M^n = (-2)^n I + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k}(-2)^k 3^{n-k} J = (-2)^n I + J \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k}(-2)^k 3^{n-k}$

$= (-2)^n I + J \left(-(-2)^n + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-2)^k 3^{n-k} \right)$ par raccrochage

$= (-2)^n I + J \left(-(-2)^n + (3-2)^n\right)$ d'après la formule du binôme de Newton pour les nombres

$\boxed{M^n = (-2)^n I + (1 - (-2)^n) J}$