Questions de cours

1. On considère deux expériences aléatoires :
   - Une urne contient 7 boules rouges et 3 boules noires. On tire successivement et sans remise 3 boules. Soit B l'événement : "deux boules qui se suivent n'ont pas la même couleur".
   - Dans une urne on place $4n$ boules blanches et n boules noires puis on tire successivement avec remise 4 boules. Soit A l'événement : "toutes les boules tirées sont noires".

   Traiter l'une des questions suivantes (au choix du colleur) :

   (a) Écrire une fonction sans paramètre qui simule la première expérience.

   (b) Écrire une fonction de paramètre n qui approche la probabilité de B avec n simulations. On pourra appeler la fonction de la question précédente.

   (c) Écrire une fonction de paramètre n qui simule la deuxième expérience.

   (d) Écrire une fonction de paramètres n, s qui approche la probabilité de A avec s simulations. On pourra appeler la fonction de la question précédente.

2. Traiter l'une des questions suivantes (au choix du colleur) :

   (a) Définir un p-uplet de E et donner le nombre de p-uplets si E possède n éléments. Déterminer deux expériences dont les résultats sont des p-uplets et en déduire le nombre de résultats.

   (b) Mêmes questions pour les p-uplets sans répétition.

   (c) Définir une permutation de E et donner le nombre de permutations si E possède n éléments. Déterminer trois expériences dont les résultats sont des permutations et en déduire le nombre de résultats.

   (d) Définir une p-combinaison de E et donner le nombre de p-combinaisons si E possède n éléments. Déterminer deux expériences dont les résultats sont des p-combinaisons et en déduire le nombre de résultats.

3. Traiter l'une des questions suivantes (au choix du colleur) :

   (a) Écrire une fonction python `dichotomie` de paramètres `f,a,b,p` qui renvoie une approximation à p près d'une solution de $f(x) = 0$ sur $[a, b]$ par la méthode de dichotomie.

   (b) Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. On définit deux suites u et v par : $u_0 = a$, $v_0 = b$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$.

   On admet que ces deux suites sont adjacentes.

   Écrire une fonction python d'arguments `a,b,p` qui renvoie une approximation de la limite commune à `p` près.

4. Traiter l'une des questions suivantes (au choix du colleur) :

   (a) Énoncer la définition de suites équivalentes.

   (b) Donner les 6 équivalences usuelles.

   (c) Énonce le théorème des croissances comparées pour les suites.

   (d) Donner les 6 règles de calcul sur les équivalences.

Programme

- Python
  - Algorithme de dichotomie sur $[a, b]$. Code simplifié de la dichotomie pour une fonction vérifiant $f(a) \leqslant 0 \leqslant f(b)$ ou bien $f(b) \leqslant 0 \leqslant f(a)$.
  - Simuler une experience aléatoire de tirage dans une urne avec *randint*, *choice* et *random*. Notamment tirages successifs avec remise et sans remise simulés par une urne virtuelle ou par un jeu de compteurs.
  - Approximation de la probabilité d'un événement par sa fréquence lors de n simulations informatiques indépendantes.

- Suites réelles
  - Suites définies implicitement (u_n solution de l'équation $f_n(x) = 0$).
  - suites récurrentes ($u_{n+1} = f(u_n)$).

- Dénombrement et application aux probabilités
  - Ensembles finis et cardinaux. Cardinal de $[\![p, q]\!]$.
  - $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(B) \iff$ il existe une bijection de A dans B.
  - p-uplets : modèle des tirages successifs avec remise.
  - p-uplets sans répétition : modèle des tirages successifs sans remise.
  - Permutations : modèle des tirages exhaustifs.
  - p-combinaisons : modèle des tirages simultanés.
  - Nombre de parties d'un ensemble à n éléments.
  - Cardinal du complémentaire.
  - Cardinal d'une union d'ensembles deux à deux disjoints.
  - Cardinal d'une union de deux ensembles pas forcément disjoints.
  - Dénombrement par étapes et cardinal d'un produit cartésien.
  - S'il y a équiprobabilité de toutes les issues d'une expérience aléatoire alors la probabilité d'un événement A est égale à $\frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)}$ où Ω est l'ensemble des issues possibles. On se limitera aux expériences de tirages dans une urne.