Questions de cours

1. Traiter (au choix du colleur) l'une des questions suivantes :
   (a) Définir l'indépendance de deux événements A et B. Donner les différentes manières de justifier l'indépendance de A et B (calcul et hypothèse).
   (b) Définir l'indépendance des événements $A_1, \dots, A_n$.
   (c) Définir l'incompatibilité 2 à 2 d'une famille d'événements $A_1, \dots, A_n$.
   (d) Définir un système complet d'événements puis en donner une caractérisation.
   (e) Énoncer sans la justifier la formule de Bayes sous ses deux formes.
2. On suppose qu'une expérience aléatoire est simulée par une fonction sans argument `simul` qui renvoie un nombre. On suppose également que les fonctions `A` et `B` d'argument `x` indiquent, par un booléen, la réalisation des événements A et B pour le résultat `x` de l'expérience.

   Traiter (au choix du colleur) l'une des questions suivantes :
   (a) Écrire une fonction `probaA` d'argument `n` qui renvoie une approximation de $\mathbb{P}(A)$ en n simulations. Cette fonction appellera `simul` et `A`.
   (b) Écrire une fonction `probaAB` d'argument `n` qui renvoie une approximation de $\mathbb{P}_B(A)$ en n simulations. Cette fonction appellera `simul`, `A` et `B`.
3. Traiter (au choix du colleur) l'une des trois questions suivantes :
   (a) Énoncer la formule des probabilités composées.
   (b) Énoncer la formule des probabilités totales.
   (c) Simuler en langage python l'expérience : un gardien d'immeuble est ivre 3 jours sur 5. Il dispose d'un trousseau de 10 clefs indiscernables pour rentrer chez lui. Lorsqu'il est sobre, il essaie les clés les unes après les autres, en mettant de côté les essais infructueux. Lorsqu'il a bu, il fait tomber le trousseau après chaque tentative, mélangeant ainsi les clés.
4. Traiter (au choix du colleur) l'une des quatre questions suivantes :
   (a) Définir $P_B(A)$ et donner une autre façon de la calculer.
   (b) Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur un univers Ω et B un événement de probabilité non nulle. Définir $\mathbb{P}_B$ (et démontrer à la demande du colleur que $\mathbb{P}_B$ est une probabilité).
   (c) Énoncer sans les justifier les propriétés d'une probabilité (prop 2.2).
   (d) Pour une expérience aléatoire finie (nombre fini d'issues), définir la notion d'équiprobabilité et donner dans ce cas, sans la justifier, la formule que l'on peut utiliser pour calculer $\mathbb{P}(A)$.

Programme

- Python
  — Algorithme de dichotomie sur $[a, b]$. Code simplifié de la dichotomie pour une fonction vérifiant $f(a) \leqslant 0 \leqslant f(b)$ ou bien $f(b) \leqslant 0 \leqslant f(a)$.
  — Simuler une expérience aléatoire avec *randint*, *choice* et *random*. Notamment tirages successifs avec remise et sans remise simulés par une urne virtuelle ou par un jeu de compteurs. La simulation renvoie un nombre ou une liste en fonction des besoins ultérieurs et/ou des prescriptions de l'énoncé.
  — Approximation de la probabilité d'un événement par sa fréquence lors de n simulations de l'expérience.
  — Approximation de $\mathbb{P}_B(A)$ par le quotient des compteurs de $A \cap B$ et de B lors de n simulations de l'expérience.

- Expériences aléatoires et probabilité
  — Expérience aléatoire, univers, événements.
  — Événement impossible, événement certain, événements élémentaires.
  — Opérations sur les événements : contraire, et, ou.
  — Relations entre événements : A entraîne B ($A \subset B$), événements incompatibles ($A \cap B = \emptyset$), événements 2 à 2 incompatibles.
  — Systèmes complets d'événements. Justifier qu'une famille est un SCE.
  — Définition d'une probabilité (ou fonction probabilité) sur Ω. Modélisation d'une expérience aléatoire par un ensemble Ω et une probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω, en particulier signification de $\mathbb{P}(A)$. Propriétés d'une probabilité $\mathbb{P}$.
  — Représentation de certaines expériences aléatoires sous forme d'arbre pondéré. Connaitre la valeur des coefficients associés aux branches.
  — Expériences aléatoires finies (Ω fini) : caractérisation d'une probabilité à l'aide des événements élémentaires, équiprobabilité (des événements élémentaires) et formule $\mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre d'issues possibles}}$.
  — Probabilités conditionnelles : définition et signification de $\mathbb{P}_B(A)$, $\mathbb{P}_B$ est une probabilité, démarche bayésienne.
  — Formule des probabilités composées, formules des probabilités totales (deux versions), formule de Bayes (deux versions).
  — Indépendance d'événements : événements indépendants, épreuves indépendantes, modélisation d'une hypothèse d'indépendance, exemples d'événements indépendants pour $\mathbb{P}_B$ mais non indépendants pour $\mathbb{P}$ ou l'inverse. Preuve de l'indépendance ou de la non indépendance par le calcul.