Mathématiques

Lycée THIERS

Devoir surveillé n° 6

1BCPST 2

Année 23-24

30 mars 2024

Durée : 3h

Qualité de la rédaction, clarté des raisonnements, présentation, orthographe et ponctuation font partie des critères de notation. Il est vivement recommandé de lire attentivement les questions et d'*encadrer les résultats*. L'usage des calculatrices est ***interdit***.

Exercice 1. *Série de jeux sur deux machines*

1. **Probabilités élémentaires**

   (a) Pour simplifier on notera B_k : "la k-ième partie se déroule sur la machine $\mathcal{B}$". Étant donné que les jeux ont lieu dans tous les cas (pas de condition d'arrêt), on a $\overline{A_k} = B_k$.

   Comme $\{A_1, B_1\}$ est un SCE (système complet d'événements), la formule des probabilités totales permet d'écrire :

   $$\mathbb{P}(G_1) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(G_1) + \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(G_1) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{10} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{10} = \frac{1}{4}. \quad \boxed{\mathbb{P}(G_1) = \frac{1}{4}}$$

   Ainsi, $\boxed{\text{la probabilité de gagner la première partie est } 1/4}$.

   (b) Notons que $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = A_1 \cap G_1 \cap G_2$.
   D'après la formule des probabilités composées :

   $$\mathbb{P}(A_1 \cap G_1 \cap G_2) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(G_1)\mathbb{P}_{A_1 \cap G_1}(G_2) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{9}{200}. \quad \boxed{\mathbb{P}(A_1 \cap G_1 \cap G_2) = \frac{9}{200}}$$

   Ainsi, $\boxed{\text{la probabilité que les 3 premières parties se fassent sur } \mathcal{A} \text{ est } 9/200}$.

   (c) Comme $\{A_1, B_1\}$ est un SCE (système complet d'événements), la formule des probabilités totales permet d'écrire :
   $\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2) + \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(A_2) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(G_1) + \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}\left(\overline{G_1}\right)$
   $= \frac{1}{2} \times \frac{3}{10} + \frac{1}{2} \times \frac{8}{10} = \frac{11}{20}. \quad \boxed{\mathbb{P}(A_2) = \frac{11}{20}}$

   Ainsi, $\boxed{\text{la probabilité de jouer la deuxième partie sur la machine } \mathcal{A} \text{ est } 11/20}$

   (d) La famille $(A_2, \overline{A_2})$ est une système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales :

   $$\begin{aligned} \mathbb{P}(G_2) &= \mathbb{P}(A_2 \cap G_2) + \mathbb{P}(\overline{A_2} \cap G_2) && \text{FPT } 1^{\text{ère}} \text{ forme} \\ &= \mathbb{P}(A_2)\,\mathbb{P}_{A_2}(G_2) + \mathbb{P}(\overline{A_2})\,\mathbb{P}_{\overline{A_2}}(G_2) && \text{FPT } 2^{\text{ème}} \text{ forme} \\ &= \frac{11}{20} \times \frac{3}{10} + \frac{9}{20} \times \frac{2}{10} = \frac{51}{200} && \text{d'après la question précédente} \end{aligned}$$

   $$\boxed{\mathbb{P}(G_2) = \frac{51}{200}}$$

   Ainsi, $\boxed{\text{la probabilité de gagner la deuxième partie est } 51/200}$.

   Méthode n'utilisant pas la question précédente (situation observée dans certains exercices)

   Notons que $(A_1 \cap A_2,\ A_1 \cup B_1,\ B_1 \cap A_2,\ B_1 \cap B_2)$ est un système complet d'événements.
   D'après la formule des probabilités totales ($1^{\text{ère}}$ forme) :

   $$\mathbb{P}(G_2) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap G_2) + \mathbb{P}(A_1 \cap B_2 \cap G_2)$$
   $$+\mathbb{P}(B_1 \cap A_2 \cap G_2) + \mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap G_2).$$

D'après la formule des probabilités composées :
$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap G_2) = \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\,\mathbb{P}_{A_1\cap A_2}(G_2) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{9}{200}$,
$\mathbb{P}(A_1 \cap B_2 \cap G_2) = \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}_{A_1}(B_2)\,\mathbb{P}_{A_1\cap B_2}(G_2) = \frac{1}{2} \times \frac{7}{10} \times \frac{2}{10} = \frac{14}{200}$,
$\mathbb{P}(B_1 \cap A_2 \cap G_2) = \mathbb{P}(B_1)\,\mathbb{P}_{B_1}(A_2)\,\mathbb{P}_{B_1\cap A_2}(G_2) = \frac{1}{2} \times \frac{8}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{24}{200}$,
$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap G_2) = \mathbb{P}(B_1)\,\mathbb{P}_{B_1}(B_2)\,\mathbb{P}_{B_1\cap B_2}(G_2) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{10} \times \frac{2}{10} = \frac{4}{200}$,
$\mathbb{P}(G_2) = \dfrac{9}{200} + \dfrac{14}{200} + \dfrac{24}{200} + \dfrac{4}{200}$. On retrouve $\boxed{\mathbb{P}(G_2) = \dfrac{51}{200}}$.

(e) On cherche $\mathbb{P}_{G_2}(A_2)$.

D'après la formule de Bayes $\mathbb{P}_{G_2}(A_2) = \dfrac{\mathbb{P}(A_2)\,\mathbb{P}_{A_2}(G_2)}{\mathbb{P}(G_2)}$. En reportant les valeurs trouvées aux question (c) et (d), on trouve $\mathbb{P}_{G_2}(A_2) = \dfrac{\frac{11}{20} \times \frac{3}{10}}{\frac{51}{200}} = \dfrac{33}{51}$. $\boxed{\mathbb{P}_{G_2}(A_2) = \dfrac{33}{51}}$

Méthode n'utilisant pas les questions précédentes (situation observée dans certains exercices)

$\mathbb{P}_{G_2}(A_2) = \dfrac{\mathbb{P}(A_2 \cap G_2)}{\mathbb{P}(G_2)}$ par définition d'une probabilité conditionnelle.

(A_1, B_1) est un système complet d'événements. D'après la 1$^{\text{ère}}$ forme de la FPT :
$\mathbb{P}(A_2 \cap G_2) = P(A_1 \cap A_2 \cap G_2) + \mathbb{P}(B_1 \cap A_2 \cap G_2)$

Notons également que $(A_1 \cap A_2,\ A_1 \cup B_1,\ B_1 \cap A_2,\ B_1 \cap B_2)$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales (1$^{\text{ère}}$ forme) :

$$\mathbb{P}(G_2) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap G_2) + \mathbb{P}(A_1 \cap B_2 \cap G_2)$$
$$+\mathbb{P}(B_1 \cap A_2 \cap G_2) + \mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap G_2).$$

D'après la formule des probabilités composées :
$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap G_2) = \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\,\mathbb{P}_{A_1\cap A_2}(G_2) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{9}{200}$,
$\mathbb{P}(A_1 \cap B_2 \cap G_2) = \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}_{A_1}(B_2)\,\mathbb{P}_{A_1\cap B_2}(G_2) = \frac{1}{2} \times \frac{7}{10} \times \frac{2}{10} = \frac{14}{200}$,
$\mathbb{P}(B_1 \cap A_2 \cap G_2) = \mathbb{P}(B_1)\,\mathbb{P}_{B_1}(A_2)\,\mathbb{P}_{B_1\cap A_2}(G_2) = \frac{1}{2} \times \frac{8}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{24}{200}$,
$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap G_2) = \mathbb{P}(B_1)\,\mathbb{P}_{B_1}(B_2)\,\mathbb{P}_{B_1\cap B_2}(G_2) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{10} \times \frac{2}{10} = \frac{4}{200}$,
On en déduit :
$\mathbb{P}(A_2 \cap G_2) = \dfrac{9}{200} + \dfrac{24}{200} = \dfrac{33}{200}$ et $\mathbb{P}(G_2) = \dfrac{9}{200} + \dfrac{14}{200} + \dfrac{24}{200} + \dfrac{4}{200} = \dfrac{51}{200}$.

Par report, $\mathbb{P}_{G_2}(A_2) = \dfrac{33}{\cancel{200}} \times \dfrac{\cancel{200}}{51}$. On retrouve $\boxed{\mathbb{P}_{G_2}(A_2) = \dfrac{33}{51}.}$

(f) D'après les résulats 1. (a) et (d) on a $\mathbb{P}(G_1) \times \mathbb{P}(G_2) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{51}{200} = \dfrac{51}{800}$.

Notons que $G_1 \cap G_2 = (A_1 \cap A_2 \cap G_2) \cup (B_1 \cap B_2 \cap G_2)$ qui est une réunion d'événements incompatibles. Ainsi,

$\mathbb{P}(G_1 \cap G_2) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap G_2) + \mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap G_2)\,;$

$\mathbb{P}(G_1 \cap G_2) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{3}{10} \times \dfrac{3}{10} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{10} \times \dfrac{2}{10} = \dfrac{13}{200} = \dfrac{52}{800} \neq \dfrac{51}{800}$.

On en déduit que $\boxed{G_1 \text{ et } G_2 \text{ ne sont pas indépendants}}$.

2. (a) Comme $\{A_k, B_k\}$ est un SCE, d'après la formule des probabilités totales :

$\mathbb{P}(G_k) = \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}_{A_k}(G_k) + \mathbb{P}(B_k)\mathbb{P}_{B_k}(G_k) = \dfrac{3}{10} \times \mathbb{P}(A_k) + \dfrac{2}{10} \times (1 - \mathbb{P}(A_k))$.

$\boxed{\mathbb{P}(G_k) = \dfrac{1}{10} \times \mathbb{P}(A_k) + \dfrac{2}{10}.}$

(b) De même, $\mathbb{P}(A_{k+1}) = \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}_{A_k}(A_{k+1}) + \mathbb{P}(B_k)\mathbb{P}_{B_k}(A_{k+1})$ et

$\boxed{\mathbb{P}(A_{k+1}) = \dfrac{3}{10} \times \mathbb{P}(A_k) + \dfrac{8}{10} \times (1 - \mathbb{P}(A_k)) = -\dfrac{1}{2} \times \mathbb{P}(A_k) + \dfrac{4}{5}}$.

ce qui s'écrit également $\boxed{a_{k+1} = -\dfrac{1}{2}a_k + \dfrac{4}{5}}$

(c) D'après ce qui précède, la suite (a_k) est arithmético-géométrique et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $a_{k+1} = -\dfrac{1}{2}a_k + \dfrac{4}{5}$.

L'équation $x = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{4}{5}$ admettant comme solution $\dfrac{8}{15}$, on pose $u_k = a_k - \dfrac{8}{15}$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $u_{k+1} = a_{k+1} - \dfrac{8}{15} = -\dfrac{1}{2}a_k + \dfrac{4}{5} - \dfrac{8}{15} = -\dfrac{1}{2}a_k + \dfrac{4}{15} = -\dfrac{1}{2}u_k$.

La suite (u_k) est donc géométrique de raison $-\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $u_1 = a_1 - \dfrac{8}{15} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{8}{15} = -\dfrac{1}{30}$.

Ainsi, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $u_k = -\dfrac{1}{30} \times \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{k-1}$.

D'après 1. (a) et (b), on a $\forall k \in \mathbb{N}^*$,

$\boxed{\mathbb{P}(A_k) = u_k + \dfrac{8}{15} = \dfrac{8}{15} - \dfrac{1}{30} \times \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{k-1}}$ et

$\boxed{\mathbb{P}(G_k) = \dfrac{1}{10} \times \mathbb{P}(A_k) + \dfrac{2}{10} = \dfrac{19}{75} - \dfrac{1}{300} \times \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{k-1}}$.

(d) D'après la question précédente, $\mathbb{P}(G_n) = \dfrac{19}{75} - \dfrac{1}{300} \times \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

Étant donné que $-1 < -\frac{1}{2} < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{300} \times \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$

donc par somme, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(G_n) = \dfrac{19}{75}}$

$\boxed{\text{Après un grand nombre de parties, la probabilité de gagner à une partie donnée est proche de } \dfrac{19}{75}.}$

(e) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\tau_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{19}{75} - \dfrac{1}{300} \times \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{k-1}\right) = \dfrac{19}{75} - \dfrac{1}{300n} \times \dfrac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1 + \frac{1}{2}}$.

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \tau_n = \dfrac{19}{75} - \dfrac{1}{450n}\left(1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right).}$

Comme $-1 < -1/2 < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ et, par opérations sur les limites,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \tau_n = \frac{19}{75}}.$$

Interprétation de cette limite :

$$\boxed{\text{Pour un grand nombre de parties jouées, la proportion de parties gagnées est, en moyenne, proche de } \frac{19}{75}.}$$

Ce qui était prévisible compte tenu de la question précédente.

3. (a) On cherche $\mathbb{P}(B_1 \cap G_1 \cap \cdots \cap G_n)$ car si on commence avec la machine $\mathcal{B}$ et que l'on gagne les n premières parties alors cela entraine que l'on n'a joué qu'avec la machine $\mathcal{B}$ aux n premières parties.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_1 \cap G_1 \cap \cdots \cap G_n) &= \mathbb{P}(B_1)\,\mathbb{P}_{B_1}(G_1)\,\mathbb{P}_{B_1\cap G_1}(G_2)\cdots\mathbb{P}_{B_1\cap G_1\cap\cdots\cap G_{n-2}}(G_{n-1})\,\mathbb{P}_{B_1\cap G_1\cap\cdots\cap G_{n-1}}(G_n)\\ &= \mathbb{P}(B_1)\,\mathbb{P}_{B_1}(G_1)\,\mathbb{P}_{B_2}(G_2)\cdots\mathbb{P}_{B_{n-1}}(G_{n-1})\,\mathbb{P}_{B_n}(G_n)\\ &= \tfrac{1}{2}\times\tfrac{1}{5}\times\tfrac{1}{5}\cdots\tfrac{1}{5}\times\tfrac{1}{5}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La probabilité de jouer avec la machine } \mathcal{B} \text{ et de gagner les } n \text{ premières parties est égale à } \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^n.}$$

(b) Pour que la probabilité précédente soit inférieure à $0,001$ il faut et il suffit que $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^n < 0,001$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^n < 0,001 \iff \left(\frac{1}{5}\right)^n < 0,002 \iff n\ln\left(\frac{1}{5}\right) < \ln(0,002) &\iff -n\ln(5) < \ln(0,002)\\ &\iff n > -\frac{\ln(0,002)}{\ln(5)} \text{ car } -\ln(5) < 0\\ &\iff n > 3,86... \text{ d'après l'approximation de l'énoncé}\\ &\iff n \geqslant 4 \text{ car } n \text{ est entier}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{À partir de } n = 4 \text{, la probabilité de jouer avec la machine } \mathcal{B} \text{ et de gagner les } n \text{ premières parties est inférieure à } 0,001.}$$

4. (a)

```
from random import randint
def simul(n):
    lst = []
    machine = randint(0,1)
    for k in range(n):
        issue = randint(1,10)
        if machine == 1:
            if issue <= 3:
                lst.append(1)
            else:
                lst.append(0)
                machine = 0
        else:
            if issue <= 2:
                lst.append(1)
            else:
                lst.append(0)
                machine = 1
    return lst
```

(b)
```
def approx1(n,p):
    cpt = 0
    for _ in range(p):
        resultats = simul(2*n)
        if sum(resultats) == n:
            cpt += 1
    return cpt/p
```
(c)
```
def approx2(n,p):
    cptAB = cptB = 0
    for _ in range(p):
        resultats = simul(n)
        dernier = resultats.pop()
        if sum(resultats) == n-1:
            cptB += 1
            if dernier:
                cptAB += 1
    return cptAB/cptB
```
(d)
```
def estim(n,p):
    cpt = [0]*(n)
    for _ in range(p):
        resultats = simul(n)
        for k in range(n):
            cpt[k] += resultats[k]
    return sum(cpt) / (n*p)
```
Voici un programme plus court :
```
def estim_bis(n,p):
    cpt = 0
    for _ in range(p):
        cpt += sum(simul(n))
    return cpt / (n*p)
```

Exercice 2. *Algorithme de Babylone (1800 à 1600 avant J.C.)*

1. Par récurrence avec pour proposition : $\mathcal{P}(n)$: "$x_n > 0$".
   Initialisation : $x_0 = \alpha$ est bien strictement positif.
   Hérédité : Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$.
   Ainsi x_n existe et $x_n > 0$; alors $x_{n+1} = \dfrac{x_n^2 + \alpha}{2x_n}$ existe et $x_{n+1} > 0$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   Conclusion : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
   $\boxed{\text{La suite } (x_n) \text{ est bien définie et à termes strictement positifs.}}$
2. Par une identité remarquable $(x_{n-1} - \sqrt{\alpha})^2 = x_{n-1}^2 - 2\sqrt{\alpha}\, x_{n-1} + \alpha$
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$; étudions le signe de $x_n - \sqrt{\alpha}$:
   $x_n - \sqrt{\alpha} = \dfrac{x_{n-1}^2 + \alpha}{2x_{n-1}} - \sqrt{\alpha} = \dfrac{x_{n-1}^2 + \alpha - 2\sqrt{\alpha}\, x_{n-1}}{2x_{n-1}} = \dfrac{(x_n - \sqrt{a})^2}{2x_{n-1}} \geqslant 0$ puisque $x_n > 0$ et qu'un carré

est toujours positif ou nul. Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n - \sqrt{\alpha} \geqslant 0}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x_{n+1} - x_n = \dfrac{x_n^2 + \alpha}{2x_n} - x_n = \dfrac{x_n^2 + \alpha - 2x_n^2}{2x_n} = \dfrac{\alpha - x_n^2}{2x_n} = \dfrac{(\sqrt{\alpha} - x_n)(\sqrt{\alpha} + x_n)}{2x_n}$. Puisque $x_n > 0$, le dénominateur est strictement positif. Puisque $n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{\alpha} - x_n \leqslant 0$ (d'après la question précédente) donc $x_{n+1} - x_n \leqslant 0$.
   $\boxed{\text{La suite } (x_n) \text{ est décroissante à partir du rang 1.}}$
4. La suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et minorée (par $\sqrt{\alpha}$ cf 2)), donc d'après le théorème de la limite monotone la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente, par conséquent, $\boxed{\text{La suite } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge.}}$
5. Posons $L = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $u_n > 0$, on a par passage à la limite, $L \geqslant 0$.

   On sait que $x_{n+1} = \dfrac{x_n^2 + \alpha}{2x_n}$ donc $2x_n x_{n+1} = x_n^2 + \alpha$, par ailleurs $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = L$
   d'où par produit et somme de limite et par unicité de la limite $2L^2 = L^2 + \alpha$.
   On a alors $L^2 = \alpha$ et donc $L = \sqrt{\alpha}$ car $L \geqslant 0$. $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \sqrt{\alpha}}$.
6. (a) Code Python :

```
def suite_x(a,n):
    x = a
    for i in range(n):
        x = (x**2 + a) / 2 / x # ou x = (x**2 + a) / (2 * x)
    return x
```

   (b) Code Python :

```
def racine_carree(a):
    if a < 0:
        print('Le paramètre doit être positif')
    elif a == 0:
        return 0
    else:
        return suite_x(a, 10)
```

   (c)

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
def affiche(a,n):
    x = a
    lstx = [a]
    for _ in range(n-1):
        x = (x**2+a) / (2*x)
        lstx.append(x)
    lstr = [np.sqrt(a) for _ in range(n)]
    plt.plot(lstx)
    plt.plot(lstr)
    plt.show()
```

   (d)

```
def seuil(a,p):
    """renvoie le plus petit n tel que |xn - racine(a)| <= p"""
```

```
    x, n = a, 0
    while abs(x - np.sqrt(a)) > p:
        x = (x**2+a) / (2*x)
        n += 1
    return n
```

Exercice 3. *Calcul de puissance de matrice*

1. Par le calcul on trouve $\boxed{U^2 = U}$.
   Démontrons par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}^*, U^k = U$.
   La propriété est vraie au rang 1.
   Soit $k \in \mathbb{N}^*$, supposons que $U^k = U$ (HR).
   $U^{k+1} = U^k U = UU = U^2 = U$ d'où la propriété au rang $k+1$.
   On en déduit que $\boxed{U^k = U \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}^*}$.
   $\boxed{\text{Cette égalité est fausse pour } k = 0}$ car $U^0 = I_3$ et $U^1 = U \neq I_3$.
2. Il est clair que $\boxed{A = I_3 + U}$.
   Les matrices I_3 et U commutent car I_3 commute avec toutes les matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Par la formule du binôme de Newton on a :
   $A^n = (I_3+U)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I_3^{n-k} U^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} U^k = I_3 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} U^k$ par décrochage du premier terme
   $= I_3 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} U$ car d'après la question précédente $U^k = U$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$
   $= I_3 + U \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}$ car le facteur matriciel U ne dépend pas de k
   $= I_3 + U \left(-1 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\right)$ par raccrochage
   $= I_3 + U \left(-1 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k\right) = I_3 + U(-1+2^n)$ d'après la formule du binôme de Newton
   $\boxed{A^n = I_3 + (2^n - 1)U}$
   $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (2^n - 1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\boxed{A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

Exercice 4. *Dans une urne...*

1. Un tirage correspond à une 5-combinaison de l'ensemble de toutes les boules donc
   $\boxed{\text{il y a } \binom{12}{5} \text{ tirages possibles.}}$
2. Il suffit de compléter les trois 1 par deux boules ne portant pas le numéro 1.
   $\boxed{\text{Il y a } \binom{9}{2} \text{ tirages contenant les trois numéros 1.}}$
3. Passons par le complémentaire. Il y a $\binom{7}{5}$ tirages sans boule rouge donc
   $\boxed{\text{Il y a } \binom{12}{5} - \binom{7}{5} \text{ tirages contenant au moins une boule rouge.}}$

4. On procède par étapes :
   1) On choisit les trois boules rouges : $\binom{5}{3}$ possibilités.
   2) On complète par des boules non rouges : $\binom{7}{2}$ possibilités.
   $\boxed{\text{Il y a } \binom{5}{3}\binom{7}{2} \text{ tirages contenant exactement 3 boules rouges.}}$
5. $\boxed{\text{Il n'y a que 2 tirages monocolores.}}$

   Parmi les $\binom{7}{5}$ tirages sans boules rouges il y en a un seul monocolore donc il y a $\binom{7}{5} - 1$ tirages bicolores bleu-blanc.
   Parmi les $\binom{10}{5}$ tirages sans boules blanches il y en a deux monocolores donc il y a $\binom{10}{5} - 2$ tirages bicolores bleu-rouge.
   Parmi les $\binom{7}{5}$ tirages sans boules bleues il y en a un seul monocolore donc il y a $\binom{7}{5} - 1$ tirages bicolores blanc-rouge.
   $\boxed{\text{Il y a } \binom{7}{5} - 1 + \binom{10}{5} - 2 + \binom{7}{5} - 1 = 2\binom{7}{5} + \binom{10}{5} - 4 \text{ tirages bicolores.}}$

   Il n'y a que trois types de tirages : monocolores, bicolores et tricolores donc
   $\boxed{\text{Il y a } \binom{12}{5} - \left(2\binom{7}{5} + \binom{10}{5} - 4\right) - 2 \text{ tirages tricolores.}}$
6. Un tirages sans boule blanche qui fait apparaitre les cinq numéros 1, 2, 3, 4 et 5 est entièrement caractérisée par ses boules bleues car les boules rouges présentes sont celles qui portent les numéros complémentaires à ceux des boules bleues.
   Il y a 2^5 parties de l'ensemble des boules bleues donc
   $\boxed{\text{il y a } 2^5 \text{ tirages sans boule blanche qui font apparaitre les numéros 1, 2, 3, 4, 5.}}$