Résumé sur les variables aléatoires (VA)

Dans ce résumé les VA sont **finies** et relatives à une expérience aléatoire modélisée par un univers Ω et une probabilité $\mathbb{P}$.

1 Événements définis par une variable aléatoire et opérations

Définitions

- Une variable aléatoire X est une application de l'univers Ω dans $\mathbb{R}$. L'ensemble des valeurs de X est noté $X(\Omega)$.
- Si X est une variable aléatoire et $a \in \mathbb{R}$, on définit les deux événements suivants :
  - $(X \leqslant a)$ est l'événement qui est réalisé si et seulement si $X \leqslant a$.
  - $(X = a)$ est l'événement qui est réalisé si et seulement si $X = a$.
- À partir de deux variables aléatoires X et Y et d'un réel a, on peut former les variables aléatoires suivantes :

  la somme $X + Y$, le produit XY, aX, le quotient $\dfrac{X}{Y}$ lorsque 0 n'est pas une valeur de Y.
- Si X est une VA et f une fonction telle que la composition $f(X) = f \circ X$ soit bien définie alors $f(X)$ est une VA.

De même on définit $(X > a) = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) > a\}$ qui est l'ensemble des résultats de l'expérience pour lesquels $X > a$.

2 Loi et fonction de répartition d'une variable aléatoire

Définition

La loi (de probabilité) d'une variable aléatoire X est l'application $f_X : \left\{ \begin{array}{ccc} X(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & \mathbb{P}(X = x) \end{array} \right.$.

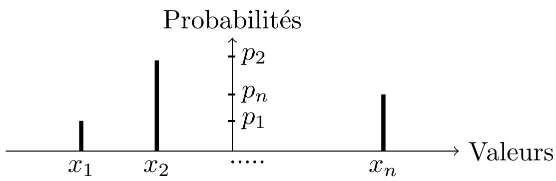
Lorsque $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$ pour $i \in [\![1, n]\!]$, la loi de X peut également se présenter sous la forme :

1. d'un ensemble de couples : $\{(x_1, p_1), (x_2, p_2), \ldots, (x_n, p_n)\}$ ou bien
2. d'un tableau :

Valeurs	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
Probabilités	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

ou bien

3. d'un diagramme en bâtons :



Propriété

Si X est une VA de loi $\Big\{(x_1, p_1), \ldots, (x_n, p_n)\Big\}$ alors $\Big\{(X = x_1), \ldots, (X = x_n)\Big\}$ est un SCE et en particulier $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Définition

$t \mapsto \mathbb{P}(X \leqslant t)$ est appelée fonction de répartition de la variable aléatoire X.

La fonction de répartition de X est souvent notée F_X. On a : $F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$.
La fonction $t \mapsto \mathbb{P}(X > t)$ est parfois appelée "antirépartition" ou fonction de survie de X.

Propriété et conséquences

Soit X une variable aléatoire. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X \leqslant t) = \mathbb{P}(X = t) + \mathbb{P}(X < t)$.
On en déduit que si $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ avec $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ alors

1. - F_X est nulle sur $]-\infty, x_1[$.
   - Si $i \in [\![1, n-1]\!]$ alors F_X est constante sur $[x_i, x_{i+1}[$ et vaut $\displaystyle\sum_{k=1}^{i} \mathbb{P}(X = x_k)$.
   - F_X est égale à 1 sur $[x_n, +\infty[$.
2. - $\mathbb{P}(X = x_1) = \mathbb{P}(X \leqslant x_1)$.
   - Si $i \in [\![2, n]\!]$ alors $\mathbb{P}(X = x_i) = \mathbb{P}(X \leqslant x_i) - \mathbb{P}(X \leqslant x_{i-1})$.

On déduit de la première conséquence que F_X est une fonction en escalier (voir chapitre *Intégration*) croissante et qu'il existe A et B tels que pour tout $t \leqslant A$ (resp. $t \geqslant B$) $F_X(t) = 0$ (resp. $F_X(t) = 1$).

3 Espérance, variance et écart-type d'une variable aléatoire

Définitions

Soit X une VA de loi $\Big((x_i,p_i)\Big)_{i\in[\![1,n]\!]}$.

- L'espérance ou moyenne de X est le nombre réel $\mathbb{E}(X)=\displaystyle\sum_{x\in X(\Omega)} x\,\mathbb{P}(X=x)=\sum_{i=1}^{n} x_i\,p_i$.
- La variance de X est le nombre réel positif $\mathbb{V}(X)=\mathbb{E}\Big(\big[X-\mathbb{E}(X)\big]^2\Big)$.
- L'écart type de X est le nombre réel positif $\sigma(X)=\sqrt{\mathbb{V}(X)}$.

X est centrée (resp. réduite) si $\mathbb{E}(X)=0$ (resp. $\mathbb{V}(X)=1$). $\sigma(X)$ mesure la dispersion de X autour de sa moyenne.

Techniques de calcul de l'espérance et de la variance

Soit X une VA de loi $\Big((x_i,p_i)\Big)_{i\in[\![1,n]\!]}$ et f une fonction numérique telle que la VA $f(X)$ soit bien définie.

- $\mathbb{E}\Big(f(X)\Big)=\displaystyle\sum_{x\in X(\Omega)} f(x)\,\mathbb{P}(X=x)=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,p_i$. Cette relation est appelée théorème de transfert.
- $\mathbb{V}(X)=\mathbb{E}(X^2)-\big[\mathbb{E}(X)\big]^2$. Cette relation est appelée formule de Koenig-Huygens ou de décentrage de la variance.
- En combinant les points précédents, on obtient $\mathbb{V}(X)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i-\left(\sum_{i=1}^{n} x_i p_i\right)^2$.

Propriétés de l'espérance et de la variance

Soit X, Y des variables aléatoires et α,β des nombres réels.

- $\mathbb{E}(\alpha X+\beta Y)=\alpha\,\mathbb{E}(X)+\beta\,\mathbb{E}(Y)$ Cette propriété est appelée linéarité de l'espérance.
- $\mathbb{E}(\alpha)=\alpha$.
- Si $X\geqslant 0$ (c-à-d si ses valeurs sont positives) alors $\mathbb{E}(X)\geqslant 0$. On parle de positivité de l'espérance.
- Si $X\leqslant Y$ (c-à-d si pour tout résultat ω, $X(\omega)\leqslant Y(\omega)$) alors $\mathbb{E}(X)\leqslant\mathbb{E}(Y)$. On parle de croissance de l'espérance.
- $\mathbb{V}(X)\geqslant 0$.
- $\mathbb{V}(\alpha X+\beta)=\alpha^2\,\mathbb{V}(X)$.
- $\mathbb{V}(X)=0 \iff X$ est une variable certaine.
- Si X et Y sont indépendantes alors $\mathbb{V}(X+Y)=\mathbb{V}(X)+\mathbb{V}(Y)$. On dit que la variance est additive pour un couple de variables aléatoires indépendantes.

4 Lois usuelles finies

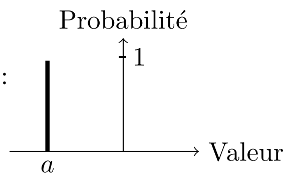
Loi certaine

Soit $a\in\mathbb{R}$. Une loi certaine se caractérise de l'une des façons suivantes :

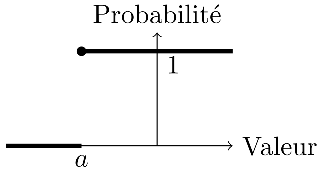
- $\big\{(a,1)\big\}$
-

Valeur	a
Probabilité	1

- Diagramme en bâtons :



- Fonction de répartition :



Une variable qui suit la loi certaine de valeur a est notée a. Une telle variable prend toujours la valeur a quel que soit le résultat de l'expérience.

$$\mathbb{E}(a)=a \quad\text{et}\quad \mathbb{V}(a)=0$$

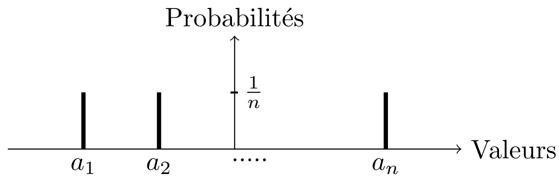
Loi uniforme

La loi uniforme sur $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ se caractérise de l'une des façons suivantes :

- $\left\{ \left(a_1, \frac{1}{n}\right), \left(a_2, \frac{1}{n}\right), \dots, \left(a_n, \frac{1}{n}\right) \right\}$
-

Valeurs	a_1	a_2	$\cdots$	a_n
Probabilités	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\cdots$	$\frac{1}{n}$

- Diagramme en bâtons :



La loi uniforme sur A est parfois notée $\mathscr{U}(A)$.

Cas particulier : lorsque $A = [\![1, n]\!]$, on parle de la loi uniforme de paramètre n que l'on note $\mathscr{U}(n)$.

$$\text{Si } X \hookrightarrow \mathscr{U}(n) \quad \text{alors} \quad \mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$$

Exemple. Le résultat d'un lancer de dé équilibré suit $\mathscr{U}(6)$.

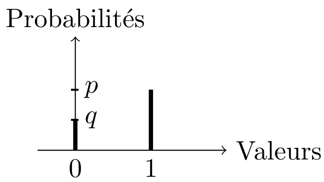
Loi de Bernoulli

Soit $p \in [0, 1]$, on pose $q = 1 - p$. La loi de bernoulli de paramètre p, notée $\mathscr{B}(p)$ ou $\mathscr{B}(1, p)$ se caractérise de l'une des façons suivantes :

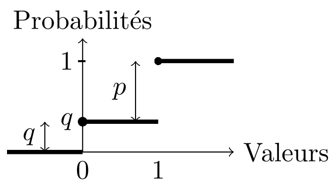
- $\{(0, q), (1, p)\}$
-

Valeurs	0	1
Probabilités	q	p

- Diagramme en bâtons :



- Fonction de répartition :



$$\text{Si } X \hookrightarrow \mathscr{B}(p) \quad \text{alors} \quad \mathbb{E}(X) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = pq$$

On retiendra que si X suit une loi de Bernoulli alors $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{E}(X)$.

Soit X une variable de Bernoulli (c-à-d une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli).
Si le paramètre de X appartient à $]0, 1[$ alors $X(\Omega) = \{0, 1\}$.
X est la fonction indicatrice de l'événement $(X = 1)$.
On retiendra que les variables de Bernoulli sont des indicatrices d'événements et réciproquement. (voir chapitre *applications*).
$1 - X$ est une variable de Bernoulli car c'est l'indicatrice de l'événement $(X = 0)$.
Le produit des variables de Bernoulli X et Y est une VA de Bernoulli car c'est l'indicatrice de l'événement $(X = 1) \cap (Y = 1)$.
Exemple. Soit X l'indicatrice de l'événement : "il y a du soleil" et Y l'indicatrice de l'événement : "il fait chaud".
$1 - X$ est l'indicatrice de l'événement : "il n'y a pas de soleil".
$1 - Y$ est l'indicatrice de l'événement : "il fait froid".
XY est l'indicatrice de l'événement : "il y a du soleil **et** il fait chaud".
$(1 - X)(1 - Y)$ est l'indicatrice de l'événement : "il n'y a pas de soleil **et** il fait froid" alors que $1 - XY$ est l'indicatrice de l'événement : "il n'y a pas de soleil **ou** il fait froid".
$X(1 - Y)$ est l'indicatrice de l'événement : "il y a du soleil **et** il fait froid".
$1 - X(1 - Y)$ est l'indicatrice de l'événement : "il n'y a pas de soleil **ou** il fait chaud".

Loi binomiale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$, on pose $q = 1 - p$. On dit que la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres (n,p), notée $\mathscr{B}(n,p)$, si $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

- Si X est le nombre de succès lors de $\underbrace{\text{$n$ \textit{épreuves indépendantes de probabilité de succès} p}}_{\text{Schéma de Bernoulli ou binomial}}$ alors $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$.
- Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$ alors $\mathbb{E}(X) = np$ et $\mathbb{V}(X) = npq$.

Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$ avec $p \in]0,1[$ alors $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$.

Schéma de Bernoulli ou binomial = Modèle des tirages avec remise.
Soit X le nombre de boules blanches obtenues lors de n tirages **avec** remise dans une urne contenant une proportion de boules blanches égale à p. On a alors $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$. Si X_i est l'indicatrice de l'événement : "la $i^{\text{ème}}$ boule tirée est blanche" alors $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

5 Comment calcule-t-on l'espérance d'une variable aléatoire X ?

On applique la méthode de calcul du premier cas dans lequel on se trouve dans la discussion suivante :

1. Si X suit une loi usuelle alors le cours donne $\mathbb{E}(X)$.
2. Si X est une combinaison linéaire de VA dont on connait l'espérance alors on calcule $\mathbb{E}(X)$ en utilisant la linéarité.
3. S'il existe deux VA indépendantes Y et Z dont on connait l'espérance et telles que $X = YZ$ alors $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)\,\mathbb{E}(Z)$.
4. Si on a l'une des relations $X = f(Y)$ ou bien $X = g(Z,T)$ où Y et (Z,T) sont respectivement une VA et un couple aléatoire dont on connait les lois alors on calcule $\mathbb{E}(X)$ grâce aux théorèmes de transfert (uniquement $2^{\text{ème}}$ année dans le cas d'un couple).
5. En dernière extrémité, on détermine la loi de X puis on calcule $\mathbb{E}(X)$.