Exercice 1 (Calcul de limites)
Calculer les limites des fonctions suivantes aux points précisés :

1. $f(x) = \frac{x^2+|x|}{x^2-|x|}$ en $-\infty$, -1, 0, 1, $+\infty$.
2. $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{4x+3}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{2x+4}}$ en 0 et $+\infty$.
3. $f(x) = x^x$ en 0 et $+\infty$.
4. $f(x) = x^\alpha \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$ pour $\alpha > 0$ en $+\infty$.
5. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sin\frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0. On pourra procéder par l'absurde et étudier $f(u_n)$ et $f(v_n)$ pour $u_n = \frac{1}{n\pi}$ et $v_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$.

Exercice 2 (Limite et encadrement)

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x\sin x}{x^2+1}$
2. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} x\lfloor\frac{1}{x}\rfloor$. En déduire la valeur de $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\lfloor x\rfloor}{x}$.

Exercice 3 (Limite et monotonie)
Soit f une fonction numérique croissante et majorée sur $\mathbb{R}_+$ telle que :
$\forall(x,y)\in\mathbb{R}_+^2,\quad f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \leqslant \dfrac{f(x)+f(y)}{2}$. Montrer que f est constante sur $\mathbb{R}_+$.
Indication. On pourra faire tendre l'une des variables vers $+\infty$.

Exercice 4 (Recherche d'équivalents simples)
Trouver un équivalent simple des expressions suivantes aux points précisés.

1. $\mathrm{e}^{\tan^2 x} - 1$ en 0.
2. $x + 1 + \ln x + (\ln x)^2$ en 0 et en $+\infty$.
3. $\ln(4x^3 - 2x + 2)$ en 0 et $+\infty$.
4. $\sqrt{4x^3 - 2x + \frac{2}{x}}$ en 0^+ et $+\infty$.

Exercice 5 (Levées de formes indéterminées avec des équivalents)
Déterminer les limites suivantes et écrire des fonctions Python permettant retrouver ces limites.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x^\alpha)\ln x}{\sqrt{x}}$ pour $\alpha > 0$.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}} - x$ (on pourra factoriser par x ou utiliser la quantité conjuguée).
3. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{4}}$.
4. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{1}{\cos x}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{\tan x}} - 1\right)$.
5. $\lim\limits_{x\to 1} \ln(x)\ln(\ln(x))$.

Exercice 6 (Une équation fonctionnelle simple)
Soit f une fonction continue en 0 telle que $f(2x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que f est constante.
Indication. On procèdera par analyse-synthèse. On pourra notamment montrer que si f vérifie les hypothèses de l'exercice alors pour tout entier naturel n et tout réel x, on a : $f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$.

Exercice 7
Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{x^\alpha}$.

1. Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Pour quelles valeurs de α peut-on prolonger f par continuité en 0 ?

Exercice 8
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } x \geq 0 \\ x & \text{si } -1 < x < 0 \\ \ln|x| & \text{si } -2 < x \leq -1 \\ \ln 3 & \text{si } x = -2 \\ x^2 + 3x + 2 + \ln 2 & \text{si } x < -2 \end{cases}$

1. Justifier la continuité de f sur $\mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 0\}$.
2. Étudier la continuité à gauche, la continuité à droite et la continuité de f en 0, -1 et -2.
3. Écrire une fonction Python qui renvoie $f(x)$ et une autre fonction qui affiche la courbe de f sur l'intervalle $[-3, 1]$.

Exercice 9 (La fonction des moyennes)
Soient a et b deux réels strictement positifs tels que $a \leqslant b$. On définit la fonction f par $f(x) = \left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$.

1. Déterminer $\mathscr{D}_f$ puis établir que $\forall x \in \mathscr{D}_f,\ f(x) = b\left(\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^x+1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$.
2. Calculer la limite de f en $+\infty$. Comment appelle-t-on $f(1)$?
3. f est-elle prolongeable par continuité ?
4. Écrire une fonction Python d'arguments $a, b, n = 200$ qui affiche les courbes des fonctions f, $x \mapsto a$, $x \mapsto b$ dans le pavé $[-3, 3] \times [a, b]$.
   Appeler cette fonction pour $a = 1$ et $b = 2$, que peut-on conjecturer pour f ?
   En admettant cette conjecture, classer les nombres $\sqrt{ab}$, $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, $\frac{2ab}{a+b}$, $\frac{a+b}{2}$ et b.

Exercice 10
Étudier la continuité des fonctions $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$ et $g(x) = \sqrt{x^2-3x+2}$.
Écrire des fonctions python *courbe_f* et *courbe_g* de paramètres a, b, n qui tracent les courbes de f et g sur l'intervalle $[a, b]$ avec n points. Expliquer comment on peut représenter graphiquement la fonction f sur les deux intervalles constituant D_f.

Exercice 11
Montrer que tout polynôme à coefficients réels de degré impair admet au moins une racine réelle. *Indication : on pourra considérer un polynôme* $P(X) = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k X^k$ *de degré impair* $2n+1$ *avec* $n \in \mathbb{N}$ *et on discutera sur le signe du coefficient dominant* a_{2n+1}.

Exercice 12
Soit $a < b$ et $f : [a, b] \to [a, b]$ une application continue. Montrer que f a un point fixe.
Indication : on pourra appliquer le TVI à la fonction $g(x) = f(x) - x$.

Exercice 13
On définit la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans un intervalle que l'on précisera.
2. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, l'équation $e^{-x} = nx$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$. On la notera x_n.
3. Montrer que (x_n) converge vers 0.
4. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, l'équation $e^{-x} = xe^{\frac{1-n}{n}}$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$ que l'on notera y_n.
5. Montrer que (y_n) converge et déterminer sa limite.
6. Écrire une fonction python `approx(n,z)` qui renvoie une approximation de y_n à z près en utilisant la méthode de dichotomie avec comme intervalle de départ $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
7. Écrire un programme qui affiche les courbes des suites $(1-\frac{a}{k})_{k\in[\![p,n]\!]}$ pour a variant de 0.1 à 2 avec un pas de 0.1 et de la suite $(y_k)_{k\in[\![p,n]\!]}$. Que peut-on conjecturer ?
8. Établir que $-u_n = \mathrm{e}^{u_n - \frac{1}{n}} - 1$ avec $u_n = 1 - y_n$ et en déduire une preuve de la conjecture.

Exercice 14
Soit f la fonction numérique définie sur $[0, +\infty[$ par la relation : $f(t) = \ln(1+t) + \frac{t^2}{1+t^2}$.

1. (a) Montrer que la fonction f est strictement croissante.
   (b) Étudier la fonction $g : t \longmapsto f(t) - t$.
   Indication : on pourra chercher une racine évidente de $-t^4 - 2t^2 + 2t + 1$ et en déduire une factorisation.
   (c) En déduire la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à la première bissectrice.
   (d) Tracer $\mathscr{C}_f$ et la première bissectrice à la main puis avec python.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'équation : $f(x) = \frac{1}{n} \quad (E_n)$.
   (a) Montrer que l'équation (E_n) admet une solution et une seule a_n.
   (b) Déterminer le sens de variation de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ainsi que sa limite.
   (c) Déterminer un équivalent de $f(x)$ en 0. En déduire un équivalent de a_n.

Exercice 15
Soit $A = \arctan(2) + \arctan(3)$.

1. Justifier que $A \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.
2. Calculer $\tan A$.
3. En déduire la valeur de $\arctan(1) + \arctan(2) + \arctan(3)$.
4. Interpréter géométriquement la valeur trouvée à la question précédente.

Exercice 16
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $f_n(x) = x^n + x^2 + 2x - 1$ définie sur $\mathbb{R}_+$.

1. Dresser le tableau de variation de f_n sur $\mathbb{R}_+$ en indiquant la valeur en 0 et la limite en $+\infty$.
2. Montrer que l'équation (E_n) $f_n(x) = 0$ admet une unique solution $x_n \in \mathbb{R}_+$.
   On pourra distinguer les cas $n = 0$ et $n \geqslant 1$.
3. Écrire une fonction python `approx(n,p)` de paramètres n, p qui renvoie une approximation de x_n à p près par l'algorithme de dichotomie avec comme intervalle de départ $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.
4. Calculer x_0, x_1 et x_2.
5. Justifier l'encadrement $0 \leqslant x_n \leqslant \frac{1}{2}$ et en déduire la limite de $(x_n)^n$.
6. Démontrer que pour tout $x \in [0, 1]$, $f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$.
7. Représenter les courbes de f_n et f_{n+1} sur le segment $[0, 1]$ en tenant compte des questions précédentes et des valeurs prises par ces fonctions en 0 et 1. On représentera également x_n et x_{n+1} sur l'axe des abscisses.
8. Montrer que (x_n) est monotone et converge vers une limite que l'on notera ℓ.
9. Démontrer que $\ell^2 + 2\ell - 1 = 0$ et en déduire la valeur de ℓ.
10. Écrire une fonction python `courbe_x(n,p)` qui affiche la courbe des n premiers termes de la suite (x_k), les termes de cette suite seront approchés par la fonction *approx* de la question 3 avec la précision p.

Exercice 17
À l'aide d'une primitivation par parties, déterminer une primitive de la fonction arctan sur $\mathbb{R}$. On pourra admettre que $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.