Questions de cours

1. Traiter (au choix du colleur) l'une des trois questions suivantes :
   (a) Définir la loi binomiale de paramètres (n, p) et donner l'espérance et la variance d'une variable aléatoire qui suit une telle loi (prouver la formule de l'espérance si le colleur le demande).
   (b) Démontrer que le nombre de succès dans un schéma de Bernoulli suit une loi binomiale de paramètres (n, p) où n est le nombre d'épreuves et p la probabilité de succès de chaque épreuve.
   (c) Donner la loi suivie par une somme d'indicatrices indépendantes qui suivent la même loi (prop 6.5). À la demande du colleur, justifier-le avec un schéma de Bernoulli.
2. Traiter (au choix du colleur) l'une des quatre questions suivantes :
   (a) Définir l'indépendance de deux variables aléatoires.
   (b) Définir la loi uniforme sur l'ensemble fini A puis la loi uniforme de paramètre n. Donner une expérience aléatoire qui aboutit à une loi uniforme.
   (c) Démontrer que si X suit la loi $\mathscr{U}(n)$ alors $E(X) = \frac{n+1}{2}$.
   (d) Définir la loi de Bernoulli de paramètre p puis donner sans justification l'espérance et la variance d'une variable qui suit $\mathscr{B}(p)$.
3. Traiter (au choix du colleur) l'une des trois questions suivantes :
   (a) Définir la loi, la fonction de répartition, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X.
   (b) Énoncer sans démonstration les principales propriétés de l'espérance et la variance (prop 3.3)
   (c) Énoncer le théorème de transfert.
4. Traiter (au choix du colleur) l'une des quatre questions suivantes :
   (a) Tracer dans une même figure la courbe de la fonction de répartition d'une variable aléatoire de loi $\big((x_i, p_i)\big)_{i\in[\![1,n]\!]}$ ainsi que le diagramme en bâton de cette loi en expliquant les sauts aux points de discontinuité.
   (b) Écrire une fonction python *simul* qui prend en paramètres les listes *val, proba* et renvoie une simulation d'une variable aléatoire de loi *val, proba* (méthode de la transformée inverse). (cours)
   (c) Écrire une fonction python *espX* de paramètre q qui renvoie une estimations de $E(X)$ avec q simulations. On suppose que X est simulée par une fonction *simulX*. (cours)
   (d) Écrire une fonction python *varX* de paramètre q qui renvoie une estimations de $V(X)$ avec q simulations. On suppose que X est simulée par une fonction *simulX* (cours).

Programme

- Python
  - Approximation de la probabilité d'un événement par sa fréquence lors de n simulations de l'expérience.
  - Approximation de $\mathbb{P}_B(A)$ par le quotient des compteurs de $A \cap B$ et de B lors de n simulations de l'expérience.
  - Estimation de $E(X)$ par $\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$, et de $V(X)$ par $\frac{X_1^2+\cdots+X_n^2}{n} - \left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\right)^2$ où les X_i sont des simulations indépendantes de X.
  - Tableau de fréquences et représentation graphique d'une loi empirique.
- Variables aléatoires
  - Valeurs et univers-image d'une VA. Événements définis par une VA.
  - SCE associé à une variable aléatoire.
  - Loi de probabilité d'une VA. Différentes représentation de cette loi.
  - Fonction de répartition d'une VA. Méthodes pour déterminer la loi connaissant la fonction de répartition et inversement.
  - Espérance, variance, écart type et leurs propriétés. VA centrée réduite.
  - Formule de Koenig-Huygens ou de décentrage de la variance.
  - Théorème de transfert.
  - Loi certaine : loi suivie par une variable qui prend la même valeur quelle que soit l'issue de l'expérience.
  - Loi uniforme : loi suivie par une variable aléatoire dont toutes les valeurs sont équiprobables. Notation $\mathscr{U}(A)$.
    Loi uniforme de paramètre n : $\mathscr{U}(n) = \mathscr{U}([\![1, n]\!])$. $E(X) = \frac{n+1}{2}$.
  - Loi de Bernoulli : loi suivie par l'indicatrice d'un événement.
    $E(X) = p$ et $V(X) = pq$ lorsque $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ et $q = 1 - p$.
    Si X suit une loi de Bernoulli alors $\mathbb{E}(X) = \mathbb{P}(X = 1)$.
  - Loi binomiale : loi suivie par le nombre de succès dans un schéma de Bernoulli. $E(X) = np$ et $V(X) = npq$ lorsque $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$ et $q = 1 - p$.
  - La loi hypergéométrique n'est plus au programme mais on peut continuer à coder une simulation d'échantillonnage .
  - Indépendance de deux variables aléatoires : savoir reconnaitre une situation où deux variables aléatoires sont indépendantes (par exemple lorsqu'elles sont définies par deux épreuves indépendantes), savoir démontrer par le calcul que deux variables aléatoires ne sont pas indépendantes.
  - Indépendance d'une famille de variables aléatoires. Propriétés du type du lemme des coalitions.