Questions de cours

1. Traiter (au choix du colleur) l'une des quatre questions suivantes :
   (a) Énoncer sans démonstration le théorème de passage à la limite dans une inégalité large pour les fonctions.
   (b) Énoncer sans démonstration le théorème de comparaison pour les fonctions.
   (c) Écrire avec des symboles mathématiques la définition de $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ avec $(x_0, \ell) \in \mathbb{R}^2$.
   (d) Énoncer sans démonstration le théorème des valeurs intermédiaires.
2. Traiter (au choix du colleur) l'une des cinq questions suivantes :
   (a) Énoncer sans démonstration le théorème de la bijection.
   (b) Définir, en la justifiant, la fonction arctangente. Donner sans justification les propriétés principales de cette fonction.
   (c) Énoncer sans démonstration le théorème des croissances comparées pour les fonctions.
   (d) Énoncer les six équivalences usuelles pour les fonctions.
   (e) Donner la définition de la continuité de f en x_0 et du prolongement par continuité de f en x_0.
3. Traiter (au choix du colleur) l'une des trois questions suivantes :
   (a) Définir la loi binomiale de paramètres (n, p) et donner l'espérance et la variance d'une variable aléatoire qui suit une telle loi (prouver la formule de l'espérance si le colleur le demande).
   (b) Démontrer que le nombre de succès dans un schéma de Bernoulli suit une loi binomiale de paramètres (n, p) où n est le nombre d'épreuves et p la probabilité de succès de chaque épreuve.
   (c) Donner la loi suivie par une somme d'indicatrices indépendantes qui suivent la même loi (prop 6.5). À la demande du colleur, justifier-le avec un schéma de Bernoulli.
4. Traiter (au choix du colleur) l'une des quatre questions suivantes :
   (a) Définir l'indépendance de deux variables aléatoires.
   (b) Définir la loi uniforme sur l'ensemble fini A puis la loi uniforme de paramètre n. Donner une expérience aléatoire qui aboutit à une loi uniforme.
   (c) Démontrer que si X suit la loi $\mathscr{U}(n)$ alors $E(X) = \frac{n+1}{2}$.
   (d) Définir la loi de Bernoulli de paramètre p puis donner sans justification l'espérance et la variance d'une variable qui suit $\mathscr{B}(p)$.

Programme

- Python
  — Estimation de $E(X)$ par $\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$, et de $V(X)$ par $\frac{X_1^2+\cdots+X_n^2}{n} - \left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\right)^2$ où les X_i sont des simulations indépendantes de X.
  — Tableau de fréquences et représentation graphique d'une loi empirique.
  — Code simplifié de la dichotomie pour une fonction monotone.
  — détermination d'une limite de fonction en traçant sa courbe.
- Variables aléatoires : tout le chapitre voir programme précédent
- Limites et continuité
  — Limite finie ou infinie en un point fini ou infini. Limite à gauche et à droite. Unicité de la limite (passage à la limite dans une égalité).
  — Opérations algébriques sur les limites.
  — Limite d'une composition de fonctions. Limite de la suite $(f(u_n))$.
  — Passage à la limite dans une inégalité large.
  — Théorème de comparaison (théorème des gendarmes).
  — Théorème de la limite monotone.
  — Les six équivalents usuels en 0.
  — Propriétés de l'équivalence : produit, quotient, substitution, composition par $x \mapsto x^\alpha$ (pas de somme ni de composition par exp et ln).
  — Deux fonctions équivalentes en x_0 ont la même limite en x_0.
  — Croissances comparées ($\ln^b x$, x^a, e^{cx^d} en $+\infty$ et $\lim_{x\to 0} x^a \ln^b x = 0$).
  — Continuité en un point, caractérisation avec la limite épointée. Continuité à gauche et à droite, caractérisation avec les limites à gauche et à droite. Prolongement par continuité. Théorèmes d'opérations algébriques et de composition de fonctions continues en x_0.
  — Continuité sur un ensemble. Continuité des fonctions usuelles sur leur ensemble de définition. Théorèmes d'opérations algébriques et de composition de fonctions continues sur un ensemble.
  — Théorème des valeurs intermédiaires : tout nombre compris entre deux valeurs d'une fonction continue sur un intervalle est aussi une valeur de cette fonction.
  — Théorème des valeurs extrêmes : une fonction continue sur un segment admet un maximum et un minimum.
  — Thm de la bijection : une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle réalise une bijection de cet intervalle sur l'intervalle image.
  — Fonction arctan : définition, ensemble de définition, continuité, sens de variation, valeurs usuelles, limites, imparité, courbe et simplification des expressions $\tan(\arctan x)$ et $\arctan(\tan x)$.