Correction CB - 2024

EXERCICE 1 - Agro-Veto TB 2013

1. $u_0 = e - 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$

```
import numpy as np
def suite(n):
    u=np.e-1
    for k in range(n):
        u=(k+1)*u-1
    return u
```

```
X=np.linspace(0,19,20)
# OU X=[k for k in range (20)]
L=[u(k) for k in range (20)]
plt.plot(X,L)
plt.show()
```

2. (a) Montrons par récurrence que la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $u_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t$ » est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : $n = 0$
$\displaystyle\int_0^1 (1-t)^0 \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t = \left[\mathrm{e}^t\right]_0^1 = \mathrm{e} - 1 = u_0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédite : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie

Pour calculer $\displaystyle\int_0^1 (1-t)^{n+1} \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t$, on pose $\begin{array}{ll} u(t) = (1-t)^{n+1} & v'(t) = e^t \\ u'(t) = -(n+1)(1-t)^n & v(t) = e^t \end{array}$

u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ donc par intégration par parties,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (1-t)^{n+1} \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t &= \left[(1-t)^{n+1} \mathrm{e}^t\right]_0^1 - \int_0^1 -(n+1)(1-t)^n \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t \\
&= 0 - 1 + (n+1)\int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t \\
&= -1 + (n+1)u_n \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= u_{n+1}
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t\ .}$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,1]$, comme $0 \leq t \leq 1$, on a $0 \leq (1-t) \leq 1$ et $(1-t)^n e^t \geq 0$.
On en déduit que $0 \leq (1-t)^{n+1} \mathrm{e}^t \leq (1-t)^n \mathrm{e}^t$.

Par croissance de l'intégration, les fonctions étant continues sur $[0,1]$ et les bornes dans le bon sens $(0 < 1)$, on obtient :

$$\int_0^1 0 \,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 (1-t)^{n+1} \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t$$

ce qui donne : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est donc bien une suite positive et décroissante.}}$

On pouvait aussi étudier :
$u_{n+1} - u_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^{n+1} \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t - \int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t = \int_0^1 -t(1-t)^n \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t \leq 0$ par croissance de l'intégrale (avec $0 < 1$).

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0. D'après le théorème de la limite monotone, on peut en déduire que $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente.}}$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,1]$. $0 \leq t \leqslant 1$ et exp est croissante donc $1 \leq \mathrm{e}^t \leq \mathrm{e}$.
De plus, $1 - t \geq 0$ donc $(1-t)^n \geqslant 0$
On en déduit : $(1-t)^n \leq (1-t)^n \mathrm{e}^t \leq (1-t)^n \mathrm{e}$.

Comme $0 < 1$ et les fonctions étant continues sur $[0,1]$, par croissance de l'intégrale,

$$\int_0^1 (1-t)^n \,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e} \ \,\mathrm{d}t$$

Comme $\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n \,\mathrm{d}t = \left[\frac{-(1-t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$, on obtient :

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{1}{n+1} \leq u_n \leq \dfrac{e}{n+1}.}$

(d) Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e}{n+1} = 0$, par le théorème des gendarmes,

on peut affirmer que : $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.}$

3. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $S'_n = S_n + \dfrac{1}{n \cdot n!}$.

(a) Montrons par récurrence que la propriété $\mathcal{Q}(n)$: « $u_n = n!(e - S_n)$ » est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Initialisation : $n = 1$.
D'une part, on sait que $u_0 = e - 1$ et $u_1 = (0+1)u_0 - 1 = e - 2$.

D'autre part, $1!(e - S_1) = e - \displaystyle\sum_{k=0}^{1} \frac{1}{k!} = e - 2$.

Donc $\mathcal{Q}(1)$ est vraie.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{Q}(n)$ est vraie.

$$\begin{aligned}
(n+1)!\,(e - S_{n+1}) &= (n+1)!\left(e - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!}\right) \\
&= (n+1)!\left(e - S_n - \frac{1}{(n+1)!}\right) \\
&= (n+1)n! \times (e - S_n) - 1 \\
&= (n+1)u_n - 1 \text{ par hypothèse de récurrence} \\
&= u_{n+1}
\end{aligned}$$

donc $\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie .

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = n!(e - S_n)\ .}$

(b) • $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_{n+1} - S_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!}$

$\boxed{(S_n) \text{ est une suite croissante.}}$

• $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S'_{n+1} - S'_n = S_{n+1} + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+1)!} - S_n + \frac{1}{n \cdot n!}$

$$= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+1)!} - \frac{1}{n\cdot n!}$$

$$= \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!}$$

$$= \frac{n^2 + 2n - n^2 - 2n - 1}{n(n+1)(n+1)!}$$

$$= \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!}$$

$S'_{n+1} - S'_n \leq 0$. $\boxed{\text{Donc } (S'_n) \text{ est une suite décroissante.}}$

• $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S'_n - S_n = \frac{1}{n \cdot n!}$ donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} (S_n - S'_n) = 0.}$

$\boxed{\text{Les suites } (S_n) \text{ et } (S'_n) \text{ sont des suites adjacentes.}}$

(c) D'après le théorème des suites adjacentes, on peut donc affirmer que :

$\boxed{(S_n) \text{ et } (S'_n) \text{ convergent vers une même limite.}}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = n!(e - S_n)$ donc $S_n = e - \frac{u_n}{n!}$.

Comme $\lim_{n\to+\infty} (u_n) = 0$, on en déduit que : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = e = \lim_{n\to+\infty} S'_n.}$

(d) • (S_n) converge vers e et est croissante. On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_{n+1} \leq e$

On a donc $S_n + \frac{1}{(n+1)!} \leq e$ et ainsi, $\frac{1}{(n+1)!} \leq e - S_n$.

• De plus, (S'_n) converge vers e et est décroissante. On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S'_n \geq e$. On a donc $S_n + \frac{1}{n \cdot n!} \geq e$ et ainsi, $-S_n + e \leq \frac{1}{n \cdot n!}$.

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{(n+1)!} \leq e - S_n \leq \frac{1}{n \cdot n!}.}$

(e) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $nu_n = nn!(e - S_n)$

D'après la question précédente, $\frac{n.n!}{(n+1)!} \leq n.n!(e - S_n) \leq 1$.

On a donc : $\frac{n}{n+1} \leq nu_n \leq 1$ donc $\frac{1}{\frac{1}{n} + 1} \leq nu_n \leq 1$.

Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{n}+1} = 1$. Par le théorème des gendarmes, on peut donc affirmer que :

$\boxed{\lim_{n\to+\infty} (nu_n) = 1}$ ce qui revient à dire que : $\boxed{u_n \sim \frac{1}{n}.}$

EXERCICE 2 - G2E 2010

1. a) $0! = 1$ et si $n \in \mathbb{N}^*$, $n! = \prod_{k=1}^{n} k$. On a aussi $n! = n \times (n-1)!$.

```
def fact(n):
   P=1
   for k in range(1,n+1):
      P=P*k
   return P
```

```
# Version récursive
def fact(n):
   if n==0:
      return 1
   else:
      return n*fact(n-1)
```

b) $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2$, $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ si $p \leqslant n$ et $\binom{n}{p} = 0$ si $p > n$.

```
def binom(n,p):
   if p>n:
      return 0
   else:
      return fact(n)/(fact(p)*fact(n-p))
```

2. a) Soient n et p deux entiers naturels tels que $p \leqslant n$.

$$\begin{aligned}\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} &= \frac{n!}{p!(n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!}\\ &= \frac{n!(p+1 \quad + \quad n-p)}{(p+1)!(n-p)!}\\ &= \frac{(n+1)!}{(p+1)!\big((n+1)-(p+1)\big)!}\end{aligned}$$

$$\boxed{\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}.}$$

b) Pour $(n,p) = (0,0)$, on a $\binom{0+1}{0+1} = \binom{1}{1} = 1$ et $\sum_{k=0}^{0} \binom{k}{0} = \binom{0}{0} = 1$

Pour $(n,p) = (1,0)$, on a $\binom{1+1}{0+1} = \binom{2}{1} = 2$ et $\sum_{k=0}^{1} \binom{k}{0} = \binom{0}{0} + \binom{1}{0} = 1 + 1 = 2$

Pour $(n,p) = (1,1)$, on a $\binom{1+1}{1+1} = \binom{2}{2} = 1$ et $\sum_{k=1}^{1} \binom{k}{1} = \binom{1}{1} = 1$

$$\boxed{\text{On a bien } \binom{n+1}{p+1} = \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} \text{ pour les couples } (n,p) \text{ égaux à } (0,0),\ (1,0) \text{ et } (1,1).}$$

Ainsi la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $\forall p \in [\![0, n]\!]$, $\binom{n+1}{p+1} = \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p}$. » est vraie pour $n = 0$ (et pour $n = 1$) ce qui initialise la récurrence.

• Soit un entier naturel n tel que : $\forall p \in [\![0, n]\!]$, $\binom{n+1}{p+1} = \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p}$. $(\star)$

Soit $p \in [\![0, n]\!]$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} &= \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} + \binom{n+1}{p}\\ &= \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p} && \text{d'après } (\star)\\ &= \binom{n+2}{p+1} && \text{d'après 2a)}\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall p \in [\![0, n]\!].\ \binom{n+2}{p+1} = \sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p}.}$$

De plus, pour $p = n+1$, $\binom{n+2}{n+2} = 1$ et $\sum_{k=n+1}^{n+1} \binom{k}{n+1} = \binom{n+1}{n+1} = 1$ donc on a encore $\binom{n+2}{p+1} = \sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p}$.

Par conséquent, $\forall p \in [\![0, n+1]\!]$. $\binom{n+2}{p+1} = \sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p}$ donc la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par récurrence, on a donc montré que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall p \in [\![0, n]\!],\ \binom{n+1}{p+1} = \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p}.}$

c) En choisissant $p = 1$ dans la relation précédente, il vient :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{1} = \binom{n+1}{2}$ c'est-à-dire $\boxed{S_1 = \sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{(n+1)n}{2}}$

Avec $p = 2$, on obtient :

$\forall n \geqslant 2$, $\sum_{k=2}^{n} \binom{k}{2} = \binom{n+1}{3}$ donc $\sum_{k=2}^{n} \dfrac{k(k-1)}{2} = \dfrac{(n+1)n(n-1)}{3 \times 2 \times 1}$

On peut rajouter le terme pour $k = 1$ dans la somme car il est nul et ainsi,

$$\boxed{S_2 = \sum_{k=1}^{n} k(k-1) = \frac{(n+1)n(n-1)}{3}}$$

Enfin, avec $p = 3$, on obtient :

$\forall n \geqslant 3$, $\sum_{k=3}^{n} \binom{k}{3} = \binom{n+1}{4}$ donc $\sum_{k=3}^{n} \dfrac{k(k-1)(k-2)}{3 \times 2 \times 1} = \dfrac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$

On peut rajouter les termes pour $k = 1$ et $k = 2$ car ils sont nuls et ainsi,

$$\boxed{S_3 = \sum_{k=1}^{n} k(k-1)(k-2) = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4}}$$

Soit $n \geqslant 2$, on tire simultanément deux jetons au hasard dans une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n. On note X le plus petit des deux numéros tirés, et Y le plus grand des deux numéros tirés.

3. Soit $j \in [\![2, n]\!]$. L'événement $(Y \leq j)$ est réalisé ssi le plus grand des deux numéros tirés est inférieur ou égal à j ssi les numéros tirés sont tous deux inférieurs ou égaux à j.
Il y a $\binom{j}{2}$ façons de choisir deux numéros distincts entre 1 et j, et au total il y a $\binom{n}{2}$ choix possibles de deux numéros distincts entre 1 et n ; tous ces choix étant équiprobables,

$$\boxed{\forall j \in [\![2, n]\!],\ P(Y \leqslant j) = \frac{\binom{j}{2}}{\binom{n}{2}}}.$$

On remarque que cette formule reste vraie quand $j = 1$ car $P(\leqslant j) = 0$ et $\binom{1}{2} = 0$.

De plus, $\forall j \in [\![2, n]\!],\ P(Y \leqslant j) = P\big((Y < j) \cup (Y = j)\big)$
$= P(Y < j) + P(Y = j)$ par incompatibilité
$= P(Y \leqslant j - 1) + P(Y = j)$ car Y est à valeurs entières

Donc $P(Y = j) = P(Y \leqslant j) - P(Y \leqslant j - 1) = \dfrac{\binom{j}{2}}{\binom{n}{2}} - \dfrac{\binom{j-1}{2}}{\binom{n}{2}} = \dfrac{\binom{j-1}{1}}{\binom{n}{2}}$ d'après 2.a).

Donc $\boxed{\forall j \in [\![2, n]\!],\ P(Y = j) = \dfrac{2(j-1)}{n(n-1)}}$

Pour $j = 1$, on a $P(Y = 1) = 0 = \dfrac{2(1-1)}{n(n-1)}$:

$\boxed{\text{la formule est encore valable pour } j = 1.}$

4. Soit $i \in [\![1, n-1]\!]$.
L'événement $(X \geqslant i)$ est réalisé ssi le plus petit des deux numéros est supérieur ou égal à i ssi les deux numéros sont supérieurs ou égaux à i.
Il y a $\binom{n-i+1}{2}$ choix simultanés de deux numéros entre i et n et toujours $\binom{n}{2}$ choix simultanés de deux numéros entre 1 et n

Donc $\boxed{\forall i \in [\![1, n-1]\!],\ P(X \geqslant i) = \dfrac{\binom{n-i+1}{2}}{\binom{n}{2}}}$

On observe que cette formule marche encore pour $i = n$ car $P(X \geqslant n) = 0 = \binom{1}{2}$

Par un raisonnement analogue au précédent, on a :

$$P(X = i) = P(X \geqslant i) - P(X \geqslant i + 1) = \frac{\binom{n-i+1}{2}}{\binom{n}{2}} - \frac{\binom{n-i}{2}}{\binom{n}{2}} = \frac{\binom{n-i}{1}}{\binom{n}{2}} \text{ d'après 2.a)}$$

Donc $\boxed{\forall i \in [\![1, n-1]\!],\ P(X = i) = \dfrac{2(n-i)}{n(n-1)}}$.

Pour $i = n$, on a $P(X = n) = 0 = \dfrac{2(n-n)}{n(n-1)}$

$\boxed{\text{La formule est encore valable pour } i = n.}$

5. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.
$(X = i) \cap (Y = j)$ signifie que le plus petit des deux numéros vaut i et que le plus grand vaut j.

• Si $i \geqslant j$, cet événement est impossible donc $\boxed{P\big((X = i) \cap (Y = j)\big) = 0 \text{ si } i \geqslant j}$

• Si $i < j$, cela signifie que les deux numéros tirés sont égaux à i et j, il y a donc une seule façon de choisir ces deux éléments et il y a toujours $\binom{n}{2}$ façon de choisir simultanément deux numéros entre 1 et n donc $\boxed{P\big((X = i) \cap (Y = j)\big) = \dfrac{1}{\binom{n}{2}} = \dfrac{2}{n(n-1)} \text{ si } i < j}$.

On suppose $n \geqslant 3$. Pour savoir si les variables aléatoires sont indépendantes, étudions si $P\big((X = i) \cap (Y = j)\big) = P(X = i) \times P(Y = j)$ pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.

$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. $P(X = i) \times P(Y = j) = \dfrac{2(n-i)}{n(n-1)} \times \dfrac{2(j-1)}{n(n-1)}$

Si $i = j = 2$, $P(X = 2) \times P(Y = 2) = \dfrac{2(n-2)}{n(n-1)} \times \dfrac{2(2-1)}{n(n-1)} = \dfrac{4(n-2)}{n^2(n-1)^2} \neq 0$ car $n \geqslant 3$

mais $P\big((X = 2) \cap (Y = 2)\big) = 0$ donc $P\big((X = 2) \cap (Y = 2)\big) \neq P(X = 2) \times P(Y = 2)$

$\boxed{\text{Les variables aléatoires } X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes.}}$

6. a) On a vu que $X(\Omega) = [\![1, n-1]\!]$ et $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $P(X=i) = \dfrac{2(n-i)}{n(n-1)}$

De plus $Y(\Omega) = [\![2, n]\!]$ et $\forall j \in [\![2, n]\!]$, $P(Y=j) = \dfrac{2(j-1)}{n(n-1)}$

$n+1-X$ est à valeurs dans $[\![2, n]\!] = Y(\Omega)$

$$\begin{aligned}\forall j \in [\![2, n]\!],\ P(n+1-X=j) &= P(X=n+1-j)\\ &= \frac{2(n-(n+1-j))}{n(n-1)}\\ &= \frac{2(j-1)}{n(n-1)}\\ &= P(Y=j)\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\text{les variables aléatoires } n+1-X \text{ et } Y \text{ suivent la même loi}}$.

On en déduit que : $\boxed{E(n+1-X) = E(Y) \text{ et } V(n+1-X) = V(Y).}$

b) Comme $E(n+1-X) = E(Y)$, par linéarité de l'espérance, on a $n+1-E(X) = E(Y)$

donc $\boxed{E(X) = n+1-E(Y)}$

De plus, on a $V(Y) = V(n+1-X) = (-1)^2 V(X)$ donc $\boxed{V(X) = V(Y)}$

Déterminons l'espérance de Y.

$$\begin{aligned}E(Y) &= \sum_{j=2}^{n} jP(Y=j)\\ &= \sum_{j=2}^{n} \frac{2j(j-1)}{n(n-1)} \qquad \text{d'après la question 3.}\\ &= \frac{2}{n(n-1)} \sum_{j=1}^{n} j(j-1)\\ &= \frac{2}{n(n-1)} S_2\\ &\ \frac{2}{n(n-1)} \times \frac{(n+1)n(n-1)}{3} \qquad \text{d'après la question 2.c)}\end{aligned}$$

$$\boxed{E(Y) = \frac{2(n+1)}{3}}$$

De plus, $E(X) = n+1-E(Y) = n+1-\dfrac{2(n+1)}{3}$ donc $\boxed{E(X) = \dfrac{n+1}{3}}$

7. D'après le théorème de transfert,

$$\begin{aligned}E(Y(Y-2)) &= \sum_{j=2}^{n} j(j-2)P(Y=j)\\ &= \sum_{j=2}^{n} \frac{2j(j-1)(j-2)}{n(n-1)}\\ &= \frac{2}{n(n-1)} S_3\\ &= \frac{2}{n(n-1)} \times \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4} \qquad \text{d'après 2.c)}\end{aligned}$$

$$\boxed{E(Y(Y-2)) = \frac{(n+1)(n-2)}{2}}$$

Par linéarité de l'espérance, on a $E(Y(Y-2)) = E(Y^2) - 2E(Y)$

$$\begin{aligned}\text{donc } E(Y^2) &= E(Y(Y-2) + 2E(Y)\\ &= \frac{(n+1)(n-2)}{2} + \frac{4(n+1)}{3}\\ &= \frac{(n+1)(3(n-2)+8)}{6}\end{aligned}$$

$$\boxed{E(Y^2) = \frac{(n+1)(3n+2)}{6}}$$

Enfin, d'après la formule de Koenig-Huygens,

$$\begin{aligned}V(Y) &= E(Y^2) - E(Y)^2\\ &= \frac{(n+1)(3n+2)}{6} - \frac{4(n+1)^2}{9}\\ &= \frac{(n+1)(3(3n+2) - 8(n+1))}{18}\end{aligned}$$

$$\boxed{V(Y) = \frac{(n+1)(n-2)}{18} = V(X)}$$

EXERCICE 3 - Oral AV 2021.24

$\forall n \geq 1$, on note X_n le nombre de bactéries de type C obtenues lors du n-ième tirage.

De plus, $L_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \end{pmatrix}$ et $L_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

• Si lors d'un tirage on tire deux bactéries de type C (on a alors $X_n = 2$), alors au tirage suivant, on aura forcément deux bactéries de type C (et donc $X_{n+1} = 2$)

• De même si on tire deux bactéries de type D (et donc $X_n = 0$), alors au tirage suivant on aura deux bactéries de type D (donc $X_{n+1} = 0$)

• Enfin si les deux bactéries sont de types C et D (et donc $X_n = 1$), alors comme elles se reproduisent à la même vitesse, lors du tirage suivant il y aura autant de bactéries de type C que de bactéries de type D. Par conséquent, lors du tirage suivant, il y aura 4 possibilités équiprobables : (C, C), (C, D), (D, C) ou (D, D)

1. (a) Si $X_n = 0$ ou $X_n = 2$, alors $X_{n+1} = X_n$.
   On code les bactéries de type C par le nombre 1 et les bactéries de type D avec le nombre 0.
   Si $X_n = 1$, alors pour chacune des deux bactéries tirées, on a autant de chance d'avoir une bactérie de type C ou D.

```
import random as rd
# type C=1
# type D=0
def simul(n):
   X=1
   for k in range(n):
      if X==1:
         bactérie1=rd.randint(0,1)
         bactérie2=rd.randint(0,1)
         X=bactérie1+bactérie2
   return X
```

   (b) On calcule l'effectif des valeurs 0, 1 et 2 lors de N simulations de X_n. La fréquence correspond au quotient de l'effectif par le nombre de simulations (c'est-à-dire N)

```
def fréquence(n,N):
   Effectifs=[0,0,0]
   for k in range (N):
      k=simul(n)
      Effectifs[k]+=1
   return [Effectifs[i]/N for i in range(3)]
```

   (c) si N est très grand, les fréquences donnent des valeurs approchées de $P(X_n = i)$.
   On constate que lorsque n est "grand" ($n = 100$), la loi de X_n semble être donnée par $P(X_n = 0) = P(X_n = 2) = \frac{1}{2}$ et $P(X_n = 1) = 0$.

2. Au départ il y a 1 bactérie de type C et 1 bactérie de type D. D'après les explications données en préliminaire, on a 4 possibilités équiprobables pour le tirage des 2 bactéries : (C, C), (C, D), (D, C) ou (D, D)
   Donc $\boxed{X_1(\Omega) = \{0, 1, 2\},\ P(X_1 = 0) = P(X_1 = 2) = \frac{1}{4} \text{ et } P(X_1 = 1) = \frac{1}{2}}$

   Variante : on pouvait aussi observer que X_1 compte le nombre de bactérie de type C lors de 2 répétitions de manière identique et indépendante de l'expérience de Bernoulli "tirer une bactérie" (on peut considérer qu'il y a indépendance car on laisse les bactéries se reproduire un temps très long donc bien que le tirage des 2 bactéries se fasse sans remise, le nombre de bactéries étant très grand, ça ne change pas grand chose)
   $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(2, \frac{1}{2})$
   $X_1(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ et $\forall k \in \{0, 1, 2\}$, $P(X_1 = k) = \binom{2}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{2-k} = \binom{2}{k} \frac{1}{4}$
   On a donc $P(X_1 = 0) = P(X_1 = 2) = \dfrac{1}{4}$ et $P(X_1 = 1) = 2 \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}$

   $L_1 = \begin{pmatrix} P(X_1 = 0) \\ P(X_1 = 1) \\ P(X_1 = 2) \end{pmatrix}$ donc on a bien $\boxed{L_1 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix}.}$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. $X_{n+1}(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.
   Soit $k \in \{0, 1, 2\}$ D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événement $\big((X_n = 0), (X_n = 1), (X_n = 2)\big)$, on a :
   $$P(X_{n+1} = k) = P(X_n = 0)\, P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = k) + P(X_n = 1)\, P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = k) + P(X_n = 2)\, P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = k)$$

   Or d'après les explications données au début, si $X_n = 0$, on a tiré 2 bactéries de type D donc on a forcément $X_{n+1} = 0$:
   $P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 0) = 1$, $P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 1) = 0$, $P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 2) = 0$
   De même, si $X_n = 2$, alors on a $X_{n+1} = 2$
   $P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 0) = 0$, $P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 1) = 0$, $P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 2) = 1$
   Enfin, si $X_n = 1$, la situation est similaire à celle décrite pour la loi de X_1 :
   $P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{4}$, $P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}$, $P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{4}$

   On en déduit que :
   $P(X_{n+1} = 0) = P(X_n = 0) + \frac{1}{4} P(X_n = 1)$
   $P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2} P(X_n = 1)$
   $P(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{4} P(X_n = 1) + P(X_n = 2)$

   Par ailleurs,
   $$AL_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) + \frac{1}{4} P(X_n = 1) \\ \frac{1}{2} P(X_n = 1) \\ \frac{1}{4} P(X_n = 1) + P(X_n = 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(X_{n+1} = 0) \\ P(X_{n+1} = 1) \\ P(X_{n+1} = 2) \end{pmatrix}$$
   On a donc bien $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ L_{n+1} = AL_n}$

4. Montrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$: « $L_n = A^n L_0$ » est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : pour $n = 0$, on a $A^0 L_0 = I L_0 = L_0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie
D'après la question 3, $L_{n+1} = A \times L_n = A \times A^n L_0 = A^{n+1} L_0$: $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ L_n = A^n L_0.}$

5. (a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2-\lambda & 0 \\ 0 & 1/4 & 1-\lambda \end{pmatrix}$

En multipliant la ligne 3 par 4 et en échangeant les lignes 2 et 3, on a donc

$$\text{rg } (A - \lambda I) = \text{rg } \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 4(1-\lambda) \\ 0 & 1/2-\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

Puis en remplaçant L_3 par $L_3 - (1/2 - \lambda) L_2$, on obtient :

$$\text{rg } (A - \lambda I) = \text{rg } \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 4(1-\lambda) \\ 0 & 0 & -4(1-\lambda)(1/2-\lambda) \end{pmatrix}$$

Or $A - \lambda I$ est inversible ssi rg $(A) = 3$ et la matrice précédente étant triangulaire, son rang vaut 3 ssi ses termes diagonaux sont tous non nuls.

Par conséquent $\boxed{A - \lambda I \text{ est inversible ssi } \lambda \neq 1 \text{ et } \lambda \neq \tfrac{1}{2}}$

Les valeurs 1 et $\frac{1}{2}$ sont appelées "valeurs propres" de la matrice A.

(b) $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ sont solutions de l'équation } AX = X}$$

On dit que $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont des "vecteurs propres" de A, associé à la valeur propre 1

(c) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$AX = \frac{1}{2} X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{4} y = \frac{1}{2} x \\ \frac{1}{2} y = \frac{1}{2} y \\ \frac{1}{4} y + z = \frac{1}{2} z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} y \\ z = -\frac{1}{2} y \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} -y/2 \\ y \\ -y/2 \end{pmatrix},\ y \in \mathbb{R} \right\}}$

Remarque : on a donc $\mathcal{S} = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ -1/2 \end{pmatrix} \right) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

On dit que $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\frac{1}{2}$.

S est appelé "sous-espace propre" associé à la valeur propre $\frac{1}{2}$

(d) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$PX = Y \Leftrightarrow \begin{cases} x \quad\quad + z = a \\ \quad\quad -2z = b \\ \quad y + z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + b/2 \\ y = b/2 + c \\ z = -b/2 \end{cases}.$$

Le système a une unique solution donc il est de Cramer et par conséquent,

$$\boxed{P \text{ est inversible et } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}.}$$

(e) $D = P^{-1} A P$.

$$AP = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} \text{ (OU } P^{-1} A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & -1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} \text{ donc } \boxed{D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}}$$

On observe que c'est une matrice diagonale et on retrouve les valeurs de λ trouvée à la question 5.a) sur la diagonale.

(f) Montrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$: « $A^n = P D^n P^{-1}$ » est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : pour $n = 0$, on a $A^0 = I$ et $P D^0 P^{-1} = P I P^{-1} = I$
donc $A^0 = P D^0 P^{-1}$: $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie
$A^{n+1} = A \times A^n$.
Or $D = P^{-1} A P$ donc $PD = AP$ et ainsi, $PDP^{-1} = A$.
On a donc $A^{n+1} = PDP^{-1} \times PD^n P^{-1} = PDD^n P^{-1} = PD^{n+1} P^{-1}$: $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = P D^n P^{-1}}$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $L_n = A^n L_0 = PD^n P^{-1} L_0$

$$P^{-1}L_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

D est une matrice diagonale donc $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1/2)^n \end{pmatrix}$

Par conséquent, $D^n \times P^{-1}L_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1/2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -(1/2)^{n+1} \end{pmatrix}$

Enfin, $L_n = P \times D^n P L_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -(1/2)^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 - (1/2)^{n+1} \\ (1/2)^n \\ 1/2 - (1/2)^{n+1} \end{pmatrix}$

Or $L_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \end{pmatrix}$ donc en identifiant les coefficients, on obtient :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ P(X_n = 0) = P(X_n = 2) = \tfrac{1}{2} - (\tfrac{1}{2})^{n+1} \text{ et } P(X_n = 1) = (\tfrac{1}{2})^n}$$

(on peut vérifier que c'est cohérent avec les valeurs de L_0 et L_1)

Comme $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} (\frac{1}{2})^n = 0$ donc

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} P(X_n = 0) = \lim_{n \to +\infty} P(X_n = 2) = \tfrac{1}{2} \text{ et } \lim_{n \to +\infty} P(X_n = 1) = 0}$$

Ces résultats sont cohérents avec les conjectures faites à la question 1.(c)