Suites définies par une intégrale

Exercice 1 (Étude de la suite $\displaystyle\int_2^n \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}}$)

On définit la fonction $f : [2,+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.
Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on définit l'intégrale : $I_n = \displaystyle\int_2^n f(x)\mathrm{d}x$.

1. (a) Démontrer que pour tout réel x supérieur ou égal à 2 : $\frac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{x-1}}$.
   (b) En déduire un encadrement de I_n par deux suites puis la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.
2. (a) On définit la fonction $F : [2,+\infty[\to \mathbb{R}, x \to \ln(x+\sqrt{x^2-1})$.
   Calculer la dérivée de F et en déduire une expression de I_n en fonction de n.
   Retrouver la limite de la question 1.(b).
   (b) Déterminer la limite de $I_n - \ln n$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 2 (Limite de $\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{2n}$ et équivalent de $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$)

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t < \frac{1}{k} < \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\mathrm{d}t$.
2. En déduire une expression simple de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$.
3. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \sim \ln n$.
4. Démontrer que les suites de terme général $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n+1)$ convergent vers un même nombre noté γ.
5. Établir l'encadrement $1-\ln 2 < \gamma < 1$.

Exercice 3 (Étude des suites $\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \frac{1}{t} f(t)\,\mathrm{d}t$)

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$, $u_n = \displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x$ et $v_n = \displaystyle\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \frac{1}{t} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Démontrer que les suites de termes (u_n) et (v_n) convergent vers 0.

Exercice 4 (*Intégrales de Wallis*)
Soit n un entier de $\mathbb{N}$. On note I_n l'intégrale suivante : $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$

1. À l'aide d'une IPP, déterminer une relation entre I_{n+2} et I_n pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Calculer I_0 et I_1.
3. En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}$, une expression de I_{2n} et de I_{2n+1} en fonction de n.
4. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive et décroissante.
5. En déduire que $I_n \sim I_{n+1}$.
6. On pose $u_n = (n+1)I_{n+1}I_n$. Montrer que (u_n) est une suite constante.
7. En déduire un équivalent simple de I_n.
8. En déduire les valeurs de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\, I_n$. Valider avec Python.

Exercice 5 (Intégrale définissant une SRL2)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(n\theta)}{5+4\cos(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$.

1. Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N},\ |I_n| \leqslant 2\pi$. Calculer $I_1 + \dfrac{5}{4}I_0$.
2. Déterminer une constante réelle α telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} + I_n = \alpha I_{n+1}$.
3. Calculer I_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$ et de I_0 puis uniquement en fonction de n.

Intégration numérique

Exercice 6 (Calcul de limites par sommes de Riemann)
Calculer les limites des sommes et produits suivants sans le symbole intégrale et écrire des programmes en Python qui calculent ces expressions.

1. $u_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n}}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}$
2. $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n\,a+k\,b}$ avec $(a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$.
3. $x_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$.
   Indication. On exprimera $\ln(x_n)$ sous la forme d'une somme de Riemann puis on écrira sa limite à l'aide d'une intégrale à laquelle on appliquera une IPP.
   On pourra également chercher a et b tels que $\frac{x^2}{x^2+1} = a + \frac{b}{x^2+1}$.
4. $y_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sqrt{k(n-k)}$.
   Indication. On commencera par décrocher un terme en expliquant pourquoi.
   On écrira la limite de cette suite à l'aide d'une intégrale de variable d'intégration x puis on effectura le changement de variable $x = \dfrac{1+\sin t}{2}$.

Exercice 7 (Approximation d'une intégrale par une somme de Riemann)
On admettra que $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{-x}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}$.

1. Écrire une fonction Python `gauss` de paramètres `n,x>0` qui renvoie une approximation de l'intégrale $\int_{-x}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ sous la forme d'une somme Riemann à n termes.
2. On fixe $n = 10000$. Écrire une fonction python `quantile` d'argument `p` qui renvoie une approximation à 10^{-3} près du nombre x tel que $\left|\int_{-x}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t - \sqrt{2\pi}\right| = p$. On procèdera par dichotomie à partir de la fenêtre $[0, 20]$.

Fonctions définies par une intégrale

Exercice 8 (Étude de la fonction $f : x \mapsto \int_{x}^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$.)

1. Déterminer le domaine de définition D de f.
2. Montrer que f est de classe C^1 sur D. Calculer $f'(x)$ et en déduire les variations de f. Écrire une fonction Python qui renvoie une approximation de $f(x)$.

Exercice 9 (Étude de la fonction $f : x \mapsto \int_{x}^{2x} e^{\frac{1}{t}}\,\mathrm{d}t$)

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Étudier les variations de f.
3. Déterminer les limites aux bornes du domaine de définition. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0 ? Écrire un programme qui approche $f(x)$.

Exercice 10 (Comparaison de $\int_0^x f$ et de $\int_0^{f(x)} f^{-1}$)

Soit $a > 0$ et f dérivable sur $[0, a]$ telle que $f(0) = 0$ et $\forall x \in [0, a], f'(x) > 0$.

1. Montrer que f établit une bijection de $[0, a]$ dans $[0, f(a)]$.
2. Étudier la fonction $g : x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t - xf(x)$.

   En déduire l'égalité $\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{f(a)} f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x = af(a)$.
3. Donner une interprétation géométrique de l'égalité précédente.