Exercice 1 (Dérivation à la chaine)
Calculer les dérivées des fonctions suivantes, après avoir précisé en quels points elles sont dérivables.

1. $f(x) = \sqrt{-3x+2}$.
2. $f(x) = \ln(|5x-4|)$
3. $f(x) = \frac{x^a}{a^x}$ $(a>0)$
4. $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$
5. $f(x) = e^x \ln(\sin(x))$
6. $f(x) = x^{\tan(x)}$
7. $f(x) = \arctan(\sqrt{x-1})$. On pourra justifier l'équivalent $\arctan x \underset{0}{\sim} x$.

Exercice 2 (Dérivabilité de fonctions définies de façon conditionnelle)
Soient f, g et h trois fonctions définies par :

$$\begin{cases} f(x) = e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ f(0) = 0 \end{cases}, \quad g = f_{|\mathbb{R}_+} \text{ et } \quad \begin{cases} h(x) = \frac{x^2 e^{-x}}{1-e^{-2x}} & \text{si } x > 0 \\ h(x) = \frac{1}{2}x & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

1. Déterminer les domaines de définition de f, g et h.
2. Étudier la dérivabilité de f, g et h sur leur domaine de définition respectif.

Exercice 3 (Dérivation numérique)
Écrire une fonction python `affiche` qui prend en paramètres une fonction f et des nombres a, b et qui renvoie les courbes des fonctions f et f' sur $[a,b]$.

Exercice 4 (Étude d'un prolongement par continuité)
Soit f la fonction définie sur $[-1,+\infty[$ par $f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = \frac{1}{2}$.

1. Étudier la continuité de f sur $[-1,+\infty[\backslash\{0\}$.
2. Étudier la continuité de f en 0.
3. Étudier la dérivabilité de f sur $]-1,+\infty[\backslash\{0\}$.
4. Étudier la dérivabilité de f en 0 et -1.
5. Étudier f et tracer sa courbe.
6. Montrer que f induit une bijection (notée f) de $[-1,+\infty[$ sur un intervalle J à déterminer. Étudier la dérivabilité de f^{-1} sur J et calculer $(f^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right)$ et $(f^{-1})'(1)$.
7. Écrire une fonction python qui affiche la courbe de f et de f^{-1}.

Exercice 5 (Théorème de la dérivée de la réciproque avec sin et cos)

1. Démontrer que sinus réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ dans un intervalle J que l'on précisera. On notera arcsin la réciproque de cette bijection.
2. Étudier la dérivabilité de arcsin sur J et donner l'expression de $\arcsin' x$.
3. Déterminer les équations des tangentes à la courbes d'arcsin aux points $-1, 0$ et 1. Représenter dans un même repère orthonormé la première bissectrice, les courbes de la restriction de sinus à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et d'arcsin et les tangentes précédentes.
4. Écrire une fonction python qui représente dans un repère orthonormé sin et arcsin.
5. Démontrer que cosinus réalise une bijection de $[0,\pi]$ dans J. On notera arccos la réciproque de cette bijection.
6. Étudier la dérivabilité de arccos sur J et donner l'expression de $\arccos' x$.
7. Déterminer les équations des tangentes à la courbes d'arccos aux points $-1, 0$ et 1. Représenter dans un même repère orthonormé la première bissectrice, les courbes de la restriction de cosinus à $[0,\pi]$ et d'arccos et les tangentes précédentes.
8. Écrire une fonction python qui représente dans un repère orthonormé cos et arccos.

Exercice 6 (Dérivées de fonctions symétriques)
Soit f une fonction dérivable sur son domaine de définition.

1. Montrer que si f est paire alors f' est impaire.
2. Montrer que si f est impaire alors f' est paire.
3. Montrer que si f est périodique de période T alors f' est périodique de période T.

Exercice 7 (Série harmonique et constante d'Euler)

1. Démontrer, à l'aide du TAF, que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$
2. En déduire que $\forall k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $\ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k-1)$.
3. En déduire un encadrement de la suite $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$.
4. Déterminer un équivalent simple de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
5. Démontrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un nombre que l'on notera γ (appelé constante d'Euler) et que $1 - \ln 2 \leqslant \gamma \leqslant 1$.
6. Soit $T_n = S_n - \frac{1}{n}$. Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.
7. Écrire une fonction python *gamma* de paramètre p qui renvoie une approximation de γ à p près en utilisant le résultat de la question précédente.

Exercice 8 (Inégalité des accroissements finis)
Démontrer que $\forall t \in \mathbb{R}$, $|\sin t| \leqslant |t|$ et $|\arctan t| \leqslant |t|$.

Exercice 9 (Application du TAF aux suites $u_{n+1} = f(u_n)$)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in [3,4]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 4 - \frac{\ln u_n}{4}$. On pose $f(x) = 4 - \frac{\ln x}{4}$. Données numériques : $3,65 \leqslant f(4) \leqslant 3,66$ et $3,72 \leqslant f(3) \leqslant 3,73$.

1. (a) Étudier la fonction f et montrer que l'intervalle $[3,4]$ est stable par f.
   En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [3,4]$.
   (b) Montrer que f possède un unique point fixe L et $L \in [3,4]$.
   (c) Montrer que : $\forall x \in [3,4], \quad | f'(x) | \leqslant \frac{1}{10}$.
2. (a) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - L| \leqslant \frac{1}{10}|u_n - L|$ puis que $|u_n - L| \leqslant \frac{1}{10^n}$.
   (b) Que peut-on dire de la convergence de la suite (u_n) ?
   (c) En choisissant $u_0 = 3$, déterminer un entier n tel que $| u_n - L | \leqslant 10^{-9}$.
3. Écrire une fonction Python `approximation_seuil` d'arguments `u0` dans $[3,4]$ et `epsilon` strictement positif qui renvoie le couple $u_{n+1}, n+1$ où n est le plus petit entier naturel vérifiant $|u_{n+1} - u_n| \leqslant \varepsilon$.

Exercice 10 (Exemple de fonction de classe C^∞)

Soit $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

1. Justifier que f est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
   Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Que peut-on conjecturer ?
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n de degré n tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = P_n(x) f(x)$. Conjecturer la valeur du coefficient dominant de P_n.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le sens de variation de la fonction $f^{(n)}$ change au maximum $n+1$ fois.
4. Écrire une fonction python `f` de paramètre `x` qui renvoie $f(x)$. On devra obligatoirement utiliser la fonction *sqrt* du module *numpy*.
5. Écrire une fonction python `f_prime` de paramètre `x` qui renvoie $f'(x)$ sans utiliser l'expression analytique de $f'(x)$.
6. Écrire une fonction python `loiNormale` de paramètres `a,b` qui trace dans un même repère les courbes de f et f' sur $[a,b]$ sans utiliser l'expression analytique de $f'(x)$.

Exercice 11 (Réciproque d'une fonction de classe C^∞)

Soit f une fonction de classe C^∞ sur un intervalle I telle que pour tout $x \in I,\ f'(x) > 0$. Démontrer que f réalise une bijection de l'intervalle I dans l'intervalle $J = f(I)$ et que f^{-1} est de classe C^∞ sur J.

Indication : on pourra démontrer par récurrence que f^{-1} est de classe C^n sur J pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 12 (Établissement d'une conjecture avec python)

Soit $f(x) = -2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$. Écrire une fonction python qui affiche les courbes de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et de f' sur $[a,b]$ en utilisant la dérivation numérique. Que remarque-t-on ? En déduire une conjecture.

Exercice 13

1. (a) Calculer les cinq premières dérivées de la fonction ln.
   (b) Conjecturer une formule pour $\ln^{(n)}(x)$ et démontrer la par récurrence.
   (c) En déduire une formule pour la dérivée $n^{\text{ème}}$ de $x \mapsto \frac{1}{x}$.
2. Soit $f(x) = \dfrac{1}{x(x+1)}$. Calculer $f^{(n)}(x)$.
   Indication. Chercher a et b tels que $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$ et utiliser la question 1c.
3. Soit $g(x) = \dfrac{1}{2x+1}$. Calculer $g^{(n)}(x)$. On pourra utiliser la question 1c.