**Exercice 1**
On pose $e_1 = (1, -1, 2)$ et $e_2 = (1, 1, -1)$.
Est-ce que les vecteurs $v_1 = (3, 1, 0)$ et $v_2 = (4, 1, 0)$ sont combinaisons linéaires de $e_1$ et $e_2$ ? Expliciter, si possible, ces combinaisons linéaires.

**Exercice 2**
Déterminer une représentation paramétrique et des équations cartésiennes du SEV $E$.

1. $E = \text{Vect}((-2, 3))$
2. $E = \text{Vect}((3, -1, 2))$
3. $E = \text{Vect}((1, 2, -3), (3, 1, 2))$
4. $E = \text{Vect}((1, 2, 1, 4), (1, 2, 3, -1), (-1, -2, -7, 11))$

**Exercice 3**
Déterminer une représentation paramétrique et une famille qui engendre le SEV $E$.

1. $(x, y) \in E \iff 2x + 5y = 0$
2. $(x, y, z) \in E \iff 3x - 2y + z = 0$
3. $(x, y, z) \in E \iff \begin{cases} 5x - 2y + z = 0 \\ -2x + 3y + 4z = 0 \end{cases}$
4. $(x, y, z, t) \in E \iff \begin{cases} 4x - 2y + z + 4t = 0 \\ 3x - y - z + t = 0 \\ -x - y + 5z + 5t = 0 \end{cases}$

**Exercice 4**
Pour chacune des familles de vecteurs suivantes, déterminer si elle est libre ou liée. Lorsqu'elle est liée, donner une relation linéaire entre ses vecteurs.

1. $\mathscr{F}_1 = \Big((1, 2, 3), (2, 3, 4), (3, 4, 5), (4, 5, 6)\Big)$.
   Retrouver ce résultat avec la fonction python `np.linalg.matrix_rank`.
2. $\mathscr{F}_2 = \Big((1, \mathrm{i}, 1 - \mathrm{i}), (-\mathrm{i}, 1, -1 - \mathrm{i})\Big)$
3. $\mathscr{F}_3 = \Big((1, 1, 0), (0, -1, 1), (1, 0, a)\Big)$ où $a$ est un paramètre réel.

**Exercice 5**
Pour les familles de vecteurs suivantes, déterminer si elles sont génératrices de l'espace $\mathbb{K}^n$ considéré. Lorsqu'elles ne le sont pas, donner un exemple de vecteur de $\mathbb{K}^n$ qui n'est pas combinaison linéaire des vecteurs de la famille.

1. $\mathscr{F}_1 = \Big((0, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 2), (2, 0, 0, -2)\Big)$
2. $\mathscr{F}_2 = \Big((1, \mathrm{i}), (1, 0), (\mathrm{i}, \mathrm{i})\Big)$
3. $\mathscr{F}_3 = \Big((1, 2, 0), (0, -2, 1), (1, 0, 1)\Big)$. Utiliser 4 méthodes dont 1 informatique.

**Exercice 6**
Déterminer parmi les ensembles suivants ceux qui sont des sous-espaces vectoriels, et pour chacun d'eux, en donner une base et la dimension.

1. $A = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \text{ tel que } x + y + z + t = 0\}$
2. $B = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3, \ \begin{cases} 2x - 5y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}\right\}$
3. $C = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \ \begin{cases} x + z = -1 \\ 2x - y + 3z = 0 \end{cases}\right\}$
4. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y = 0\}$
5. $E = \{(a, a - b, a + b, b), \ (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.
6. $F = \{(a + 3b + c, 2a + b - 3c, -a - 2b), \ (a, b, c) \in \mathbb{C}^3\}$.

**Exercice 7**
On considère les ensembles suivants :
$E = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 / 2x - 3y + z = 0\Big\}$, $F = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 / x - 2y + z = 0\Big\}$,
$G = \Big\{(\lambda - \mu, \lambda + \mu, 2\lambda - 3\mu) / (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2\Big\}$, $H = \Big\{(\lambda + \mu, 2\lambda + \mu, \lambda + 2\mu) / (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2\Big\}$.

1. Montrer que ces quatre ensembles sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^3$.
2. Déterminer une base de chacun des sous-espaces vectoriels $E \cap F$, $E \cap G$, $G \cap H$.

**Exercice 8**
Soit $(u, v, w)$ une famille libre de $\mathbb{K}^n$.
Donner un minorant de $n$. Montrer que $(u + v, \ v + w, \ w + u)$ est une famille libre.

**Exercice 9 (*Une famille de vecteurs à paramètre*)**
Soit $m \in \mathbb{R}$ et $v_1 = (1, 1, m), \ v_2 = (2, m + 1, 2), \ v_3 = (m, 1, 1), \ u = (x, y, z)$ .
On note $E = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3)$.

1. Pour $m = 1$, déterminer une base et la dimension de $E$.
   Jusqu'à la fin du problème on supposera que $m \neq 1$.
2. On considère le système $(S)$ $\begin{cases} \lambda + 2\mu + m\gamma = x \\ \lambda + (m + 1)\mu + \gamma = y \\ m\lambda + 2\mu + \gamma = z \end{cases}$ d'inconnues $\lambda, \mu, \gamma$.

   Montrer que $u$ appartient à $E$ (c'est-à-dire $u$ est une CL de $v_1, v_2$ et $v_3$) si et seulement si $(S)$ admet au moins une solution.

3. Échelonner $(S)$ par la méthode du pivot. On ne cherchera pas à résoudre $(S)$.
4. On suppose que $m = -3$.
   (a) Montrer que $u \in E \iff x + 2y + z = 0$.
   (b) En déduire une base de $E \cap F$ où $F = \text{Vect}\big((1,0,0),(0,1,0)\big)$.
   (c) Montrer que $(v_1, v_2)$ est une base de $E$.
5. On suppose que $m \notin \{-3, 1\}$.
   Justifier que $(S)$ admet une unique solution. Qu'en déduit-on pour $(v_1, v_2, v_3)$ ?
6. On suppose que $m = 0$ et on note $u_1 = (2,2,0),\ u_2 = (0,-1,2),\ u_3 = (1,4,0)$.
   Finir la résolution de $(S)$ et en déduire la matrice des coordonnées de la famille $(u_1, u_2, u_3)$ dans la base $(v_1, v_2, v_3)$. Quelle est la particularité de cette matrice ?

**Exercice 10**

1. Montrer que l'ensemble $E = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{K}^3 / x - 2y + z = 0\Big\}$ est un SEVde $\mathbb{K}^3$ dont on donnera une représentation paramétrique, une base et la dimension.
2. Soit $F = \text{Vect}(u, v)$ avec $u = (1,1,1)$ et $v = (3,1,-1)$.
   Montrer que $(u, v)$ est une base de $F$. Vérifier que $F \subset E$ et en déduire que $F = E$.
3. Déterminer les coordonnées d'un vecteur $(x,y,z)$ de $E$ dans la base $(u, v)$ en fonction de $x, y$ et $z$.
4. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{K}^3$ et $w = (1,0,0)$.
   (a) Déterminer $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $(x,y,z) - \lambda w \in E$.
   (b) En déduire que $\mathscr{B} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{K}^3$.
   (c) Donner les coordonnées de $(x,y,z)$ dans $\mathscr{B}$.
   (d) Déterminer une équation cartésienne pour chacun des SEV $\text{Vect}(u, w)$ et $\text{Vect}(v, w)$.

**Exercice 11**

Déterminer le rang de chacune des familles suivantes par une méthode matricielle.
Sont-elles libres ? Sont-elles génératrices de $\mathbb{K}^n$ ? Sont-elles des bases de $\mathbb{K}^n$ ?
Vérifier vos résultats avec la fonction python `np.linalg.matrix_rank`.

- $\mathscr{F}_1 = \Big((2,1,1,1)\,;\ (1,2,1,1)\,;\ (1,1,2,1)\Big)$
- $\mathscr{F}_2 = \Big((1,1,0,1)\,;\ (1,-1,1,0)\,;\ (2,0,1,1)\,;\ (0,-2,1,-1)\Big)$
- $\mathscr{F}_3 = \Big((1,0,1)\,;\ (0,1,1)\,;\ (1,1,0)\Big)$
- $\mathscr{F}_4 = \Big((1,1,1)\,;\ (1,-1,1)\,;\ (1,1,-1)\,;\ (1,-1,-1)\Big)$.

**Exercice 12**

Soit $E = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z - t = 0\}$ et $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = y\}$

1. Vérifier que $E$ et $F$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.
2. Montrer que $E \cap F$ est de dimension 2 et en donner une base $\mathscr{B} = (u, v)$.
3. Déterminer une base de $E$ de la forme $(u, v, w)$.
4. Déterminer une base de $F$ de la forme $(u, v, w')$.
5. Montrer que $(u, v, w, w')$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

**Exercice 13**

Soit $\mathscr{F}$ une famille de $p$ vecteurs de $\mathbb{R}^5$.
Que dire du caractère libre ou générateur de $\mathbb{R}^5$ de la famille $\mathscr{F}$ dans les cas suivants ?
(1) $p = 5$, (2) $p = 7$, (3) $p = 2$, (4) $p = 6$ et $\text{rg}(\mathscr{F}) = 5$, (5) $p = 3$ et $\text{rg}(\mathscr{F}) = 3$,
(6) $p = 5$ et $\text{rg}(\mathscr{F}) = 3$, (7) $p = 4$ et $\text{rg}(\mathscr{F}) = 5$, (8) $p = 7$ et $\text{rg}(\mathscr{F}) = 6$

**Exercice 14 (Matrices d'une famille de vecteurs dans deux bases)**

Soit $u_1 = (1,0,1),\ u_2 = (0,1,1)$ et $u_3 = (1,1,1)$.

1. Montrer que $\mathscr{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. On pose $v_1 = (1,2,4),\ v_2 = (3,-1,0)$ et $v_3 = (-7,7,8)$.
   Déterminer les matrices de $(v_1, v_2, v_3)$ dans la base canonique et dans la base $\mathscr{B}$.
   Pour la deuxième matrice on utilisera deux méthodes :

   **Première méthode.** On cherchera les coordonnées du vecteurs $(a,b,c)$ dans $\mathscr{B}$.
   **Deuxième méthode.** On exprimera les vecteurs $u_1, u_2, u_3$ en fonction des vecteurs $e_1, e_2, e_3$ de la base canonique puis on exprimera les vecteurs $e_1, e_2, e_3$ en fonction de $u_1, u_2, u_3$.
3. Utiliser trois méthodes dont 1 informatique pour déterminer le rang de $(v_1, v_2, v_3)$.
4. $(v_1, v_2, v_3)$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$ ?

**Exercice 15 (Inclusion de SEV)**

On considère les SEV de $\mathbb{R}^4$ suivants :
$E = \text{Vect}((1,-1,3,-2),(-2,2,-5,3),(-3,3,7,-10),(2,-2,1,1))$
$F = \text{Vect}((1,0,1,-1),(0,1,1,-2),(1,0,0,0),(0,0,-1,1))$
$E_1$ le SEV de $\mathbb{R}^4$ d'équations cartésiennes $\begin{cases} x + \ \ y - 3z + 2t = 0 \\ 3x + 2y - 5z + 4t = 0 \end{cases}$
$F_1$ le SEV de $\mathbb{R}^4$ d'équation cartésienne $x - y + 5z - 2t = 0$.

1. Démontrer que $E \subset F$.
2. Démontrer que $E_1 \subset F_1$.
3. A-t-on $E_1 \subset F$ ?