Mathématiques

Lycée THIERS
Année 23-24

Devoir surveillé n° 8

1BCPST 2

25 mai 2024
Durée : 3h

Qualité de la rédaction, clarté des raisonnements, présentation, orthographe et ponctuation font partie des critères de notation.
Il est vivement recommandé de lire attentivement les questions et d'*encadrer les résultats*. L'usage des calculatrices est ***interdit***.

Exercice 1. *Fonctions et suites implicites et récurrentes*

Soit f la fonction de variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x\mathrm{e}^x \text{ si } x > 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-x/2} \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$

On pourra utiliser librement les valeurs approchées suivantes : $\sqrt{\mathrm{e}} \approx 1.65$, $\mathrm{e}^{3/2} \approx 4.48$, $\ln 2 \approx 0.69$.

Partie A : étude de la fonction f

1. Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.
3. Étudier les variations de f sur $]-\infty, 0]$ et sur $[0, +\infty[$ (on calculera les limites).
4. Montrer que l'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution sur $\mathbb{R}_+^*$.
5. Étudier la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ sur $\mathbb{R}_-$ et en déduire son signe et les points fixes de f sur $\mathbb{R}_-$.
   On notera en α l'unique point fixe non nul et on justifiera que $-3 < \alpha < -2$.

Partie B : étude d'une suite implicite

1. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ admet une unique solution dans $]0, +\infty[$ que l'on notera x_n.
2. Comparer $f(x_n)$ et $f(x_{n+1})$ et en déduire le sens de variation de (x_n).
3. Prouver la convergence de (x_n) puis démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$.
4. Établir que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a $nx_n = \mathrm{e}^{-x_n}$.
   En déduire que $x_n \sim \dfrac{1}{n}$ puis en déduire que $x_n - \dfrac{1}{n} \sim -\dfrac{1}{n^2}$.

Partie C : étude d'une suite récurrente

On considère la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $y_0 = -4$ et $y_{n+1} = f(y_n)$ pour tout entier $n \geq 0$.

1. Montrer que : $\forall x \in]-\infty, \alpha]$, $|f'(x)| \geq \frac{\mathrm{e}}{2}$
2. Justifier par le TAF que : $\forall x \in]-\infty, \alpha]$, $|f(x) - \alpha| \geq \frac{\mathrm{e}}{2}|x - \alpha|$
3. Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $y_n < \alpha$
4. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|y_n - \alpha| \geq \left(\dfrac{\mathrm{e}}{2}\right)^n |\alpha + 4|$
5. En déduire la limite de la suite (y_n).

Exercice 2. *Modèle de diffusion d'Ehrenfest)*

On se propose d'étudier le modèle de diffusion d'Ehrenfest dans un cas particulier.
On considère deux urnes U_1 et U_2 contenant à elles deux 3 boules.
À chaque étape, on choisit de façon équiprobable un entier entre 1 et 3. Si ce nombre est inférieur ou égal au nombre de boules contenues dans l'urne U_1 alors on met une boule de l'urne U_1 dans l'urne U_2 ; sinon, on met une boule de l'urne U_2 dans l'urne U_1. À chaque étape on effectue donc un échange de boule entre les deux urnes.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n le nombre de boules dans l'urne U_1 à l'étape n et $Y_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 2) \\ \mathbb{P}(X_n = 3) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

Par exemple, $\mathbb{P}(X_1 = 3)$ est la probabilité qu'il y ait 3 boules dans l'urne U_1 après 1 échange et $\mathbb{P}(X_2 = 0)$ est la probabilité qu'il y ait 0 boule dans l'urne U_1 après 2 échanges.

I. Un exemple de début de partie

1. On suppose qu'initialement l'urne U_1 contient 2 boules et l'urne U_2 en contient 1. Déterminer Y_0.
2. On suppose vérifiées les conditions initiales de la question précédente. Aux trois premières étapes on choisit respectivement les nombres 1, 2 puis 3.
   (a) Donner le nombre de boules dans U_1 après les trois premiers échanges.
   (b) Calculer les probabilités conditionnelles des événements $(X_4 = 0)$, $(X_4 = 1)$, $(X_4 = 2)$ et $(X_4 = 3)$ sachant que l'on a choisi les nombres 1, 2 et 3 aux trois premières étapes.
3. Calculer la probabilité que l'on choisisse le nombre 1 aux n premières étapes ainsi que la limite de cette probabilité lorsque n tend vers $+\infty$. Interpréter cette limite.

II. Matrice de transition

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $\Big((X_n = 0), (X_n = 1), (X_n = 2), (X_n = 3)\Big)$ est un système complet d'événements.
2. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $Y_{n+1} = AY_n$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$.
   Une récurrence n'est pas nécessaire.
3. Dans cette question uniquement on suppose que le nombre de boules initialement présentes dans U_1 a été choisi aléatoirement dans l'ensemble $[\![0, 3]\!]$. Si on sait qu'après 1 échange il y a 2 boules dans U_1, calculer la probabilité qu'il y ait eu 1 seule boule initialement dans U_1.
4. On note A^T la transposée de A.

   Déterminer les solutions du système d'écriture matricielle $(A - I_4)^T V = 0_{\mathcal{M}_{4,1}}$ où $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$.

   Donner une solution V_0 de ce système de la forme $\begin{pmatrix} 1 \\ y_0 \\ z_0 \\ t_0 \end{pmatrix}$.
5. En déduire que $A - I_4$ n'est pas inversible.

6. En déduire le nombre de solutions du système d'écriture matricielle $(A - I_4)V = 0_{\mathcal{M}_{4,1}}$.
   On ne cherchera pas à résoudre ce système dans cette question.

III. Étude de la probabilité stationnaire

1. Résoudre le système linéaire $(A - I_4)V = 0_{\mathcal{M}_{4,1}}$ et montrer que ses solutions peuvent se présenter sous la forme $\lambda \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{pmatrix}$ où $\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3$ sont des nombres tels que $\sum_{k=0}^{3} \pi_k = 1$ que l'on déterminera.
2. On note $\Pi = \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{pmatrix}$ et on suppose que $Y_0 = \Pi$.

   Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N},\ Y_n = \Pi$ et interpréter ce résultat.

IV. Calcul de A^n et application

On note $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

1. Expliciter le produit PQ. En déduire que P est inversible et expliciter P^{-1}.
2. Expliciter la matrice $D = P^{-1}AP$ et donner les coefficients de D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}$.
4. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ Y_n = A^nY_0$.
5. On suppose qu'initialement toutes les boules sont dans U_2.
   (a) Donner la valeur de Y_0.
   (b) Montrer que $\mathbb{P}(X_n = 0)$ est égal à un coefficient de A^n que l'on exprimera en fonction de n.
   (c) Calculer $\mathbb{P}(X_{2n+1} = 0)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_{2n} = 0)$. Interpréter ces valeurs.
   (d) La suite $(\mathbb{P}(X_n = 0))_{n \in \mathbb{N}}$ admet-elle une limite ?

V. Simulation informatique

1. Compléter le code de la fonction `echange` qui prend en argument le nombre de boules dans U_1 et qui renvoie le nombre de boules dans U_1 après une étape (un seul échange).

```
from ...........................
def echange(k):
    nombre = randint(...,...)
    if...............:
        return .......
    return .........
```

2. Écrire une fonction `simulX` qui prend en arguments le nombre `n` d'étapes et le nombre `k` de boules initialement dans U_1 et qui retourne une simulation de X_n. On pourra appeler la fonction `echange` dans une boucle *for*.

3. Écrire une fonction `approx1` qui prend en arguments le nombre `n` d'étapes, le nombre `k` de boules initialement dans U_1, le nombre `q` de simulations et qui renvoie une approximation de la probabilité qu'il n'y ait plus de boules dans U_1 après n échanges.
4. Écrire une fonction `approx2` qui prend en arguments `n`, `k`, `q` et qui renvoie une approximation de la probabilité conditionnelle qu'il n'y ait plus de boules dans U_1 après n échanges sachant que le nombre de boules dans U_1 est différent de 2.
5. Écrire une fonction `esperance` de paramètres `n`, `k`, `q` qui renvoie une approximation de $E(X_n)$ avec `q` simulations.
6. Écrire une fonction `variance` de paramètres `n`, `k`, `q` qui renvoie une approximation de $V(X_n)$ avec `q` simulations.
7. Écrire une fonction `loi` de paramètres `n`, `k`, `q` qui renvoie une approximation de la loi de X_n sous la forme d'une 4-liste de fréquences avec `q` simulations.

Ce protocole de tirage est un cas particulier d'un modèle statistique important introduit en 1907 par les Époux physicien et mathématicien Ehrenfest.
Ce modèle est parfois appelé modèle des chiens et des puces car les urnes peuvent être vues comme des chiens et les boules comme des puces. Le chien contenant le moins de puces étant le plus attractif pour les parasites selon le rapport des nombres de puces contenues sur chacun des chiens.

Exercice 3.

Écrire une fonction python de paramètre `n` qui renvoie une approximation de $\displaystyle\int_0^\pi \sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x$ par la méthode des rectangles.